第二單元　二階常數係數常微分方程式之求解

(Linear Differential Equations of Second Order With Constant Coefficients)

二階:表示其通解必須含有兩個任意常數項(即需有 C_1 及 C_2 兩項)

二階常數係數常微分方程式解法分析(常數係數表示係數 a 及 b 為常數)

齊次標準型式為: $y''+ay'+by=0$…… 齊次(Homogeneous D.E.)$\Rightarrow$通解為 y_h

非齊次標準型式為: $y''+ay'+by=r(x)$…… 非齊次(Non-Homogeneous D.E.) $\Rightarrow$

特解為 y_p,非齊次的通解為 $y=y_h+y_p$(齊次通解+非齊次特解)

解法:(1)先求得 y_h(利用特徵方程式,判定兩根特性)

(2) 再求得 y_p(利用微分反算子方法求得),

求得齊次通解 y_h ，設所求的解 $y_h=e^{\lambda x}$, 其中λ為未知係數

其特徵方程式(Characteristic Equation): $\lambda^2+a\lambda+b=0$　其兩根

$\lambda 1_1,\lambda_2=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ ，有下列 3 種狀況：

(1) 兩根為相異實根(real roots):

兩個解 $y_1=e^{\lambda_1 x}, y_2=e^{\lambda_2 x}$ 且為線性獨立。$\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{-a}{2}$　$\therefore$ **通解** $y_h=c_1y_1+c_2y_2$

(2)兩根為相等實根(real double roots):

兩個解相同，即 $y_1=y_2=e^{-\frac{a}{2}x}$ ，為線性相依(Linear dependent)

(無法用來表示通解,會造成任意常數項個數會減少)

需再利用變數轉換法得第三解 $y_3=xy_1$ 且與 y_1 為線性獨立(Linear independent)

$\therefore$ **通解** $y_h=c_1y_1+c_2y_3=c_1y_1+c_2xy_1$

(3)兩根為共軛虛根(complex conjugate roots):

$\lambda_1=p+qi,\lambda_2=p-qi,$ 而 $p,q\in R$ (實數)　兩解　$y_1=e^{(p+qi)x}$ ， $y_2=e^{(p-qi)x}$

為表示更簡化，化簡得第三解，第四解 y_3 與 y_4

$y_3=e^{px}\cos qx$ ， $y_4=e^{px}\sin qx$ ，且為線性獨立

$\therefore$ **通解** $y_h=c_1y_3+c_2y_4=c_1e^{px}\cos qx+c_2e^{px}\sin qx \quad =e^{px}\left[c_1\cos qx+c_2\sin qx\right]$

※範例 1：solve $y''+8y'=0$ ，Solution： $\lambda''+8\lambda=0\Rightarrow\lambda(\lambda-8)=0$

$\Rightarrow \lambda=8.,.\lambda=0$ 為相異實數 ， $y_1=e^{0x}$ 及 $y_2=e^{8x}$ ，通解： $y_h=c_1+c_2e^{8x}$

※範例 2：solve $y''+4y'+4y=0$

solution： $y''+4y'+4y=0\Rightarrow(\lambda+2)^2=0$ ， $\lambda=-2..-2$(等根)

則 $y_1=e^{-2x}$ ， $y_2=e^{-2x}$ ，所以通解： $y_h=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$

※範例 3：solve $y''-2y'+2y=0$

Solution： $\lambda^2-2\lambda+2=0$ ， $\lambda=\dfrac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\dfrac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$

所以通解： $y_h=e^{x}[c_1\cos x+c_2\sin x]$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-4*4*(-3)}}{2*4} = \dfrac{-4 \pm 8}{8} = \dfrac{1}{2}$或$\dfrac{-3}{2}$ ，通解 $y_h = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$

Case 2： 當 λ_1 and λ_2 $(\lambda_1 = \lambda_2)$ (相同實數)

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ， $y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} \Rightarrow$ 為相依，需要再去找出另一個獨立解

參數變化法(Parameter variable Method)：利用已知的一個解—推出另一線性獨立解 ，假設 $y_3 = u(x) * y_1(x)$ ，$u(x)$ 叫做未知的函數，則 $y_3' = u' * y_1 + u * y_1'$

$y_3'' = (u'' * y_1 + u' * y_1') + (u' y_1' + u y_1'') = u'' y_1 + 2u y_1' + u y_1''$ ，代回原式得

$[u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1''] + a[u' y_1 + u y_1'] + b[uy] = 0$ ，整理 $u''(y_1) + u'[2y_1' + a y_1] + u[y'' + a y_1' + b y_1] = 0$

又 $2y_1' + a_1 y_1 = 2(\lambda_1 y_1) + a(y_1) = (2\lambda_1 + a) * y_1 = 0$ ，即$2\lambda_1 + a = 0 ... \lambda = \dfrac{-a}{2}$

假設$\begin{cases} u'' = 0 \Rightarrow u = Ax + B = x \\ 2y_1' + a y_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dfrac{-a}{2} \end{cases}$成立， 通解 $y_h = c_1 y_1 + c_2 (x * y_1)$ ，第 2 個解多乘上一個 **x**

※範例 4：solve $y'' + 4y' + 4y = 0$ ， $y(0) = 1 .... y'(0) = 1$

solution： $y'' + 4y' + 4y = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)^2 = 0$ ， $\lambda = -2 .. -2$(等根)

則 $y_1 = e^{-2x}$ ， $y_2 = e^{-2x}$ ，所以通解： $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$

又 $y_h' = c_2[e^{-2x} + (-2)x e^{-2x}]$ ，當 $x = 0, y = 1 \Rightarrow 1 = c_1 e^0 + c_2(0) \Rightarrow c_1 = 1$

$x = 0, y' = 1 \Rightarrow 1 = (-2)e^0 + c_2[e^0 + (0)(-2)e^0] \quad \Rightarrow 1 = -2 + c_2 \Rightarrow c_2 = 3$

所求的特解： $y = (1)e^{-2x} + 3(x e^{-2x}) = (1 + 3x)e^{-2x}$

Case 3： λ_1 and λ_2 (共軛複數 Complex roots)

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1} = i$ ，$\sqrt{-4} = \sqrt{4} * \sqrt{-1} = \sqrt{4} * i = 2i$

$z = 3 + 2i$ ， $\bar{z} = 3 - 2i$ (互為共軛複數)

任何一個複數 $z = a + bi$ a 及 b 為實數， $\bar{z} = a - bi$ 稱為複數 z 的共軛複數

$\lambda_1 = p + qi$ ，$\lambda_2 = p - qi$ ，來自 $(\lambda^2 + a\lambda + b = 0)$

則通解 $y_h = e^{px}[c_1 \cos qx + c_2 \sin qx]$

※範例 5：solve $16y'' - 8y' + 5y = 0$

Solution：$16\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0$ ，$\lambda = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 320}}{32} \Rightarrow \lambda = \dfrac{8 \pm \sqrt{-256}}{32} = \dfrac{8 \pm 16i}{32}$

$\lambda = \dfrac{1}{4} \pm \dfrac{1}{2} i$ ， 所以通解 $y_h = e^{\frac{1}{4}x}[c_1 \cos \dfrac{x}{2} + c_2 \sin \dfrac{x}{2}]$

※範例 6：solve $y'' - 2y' + 2y = 0$ (90 台科大)

Solution： $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ ， $\lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$

$\therefore y_h = e^x[c_1 \cos x + c_2 \sin x]$

※範例 7：solve $y'' - 2y' = 0$ (89 台大) ， Subject to $y(0) = 0$ ， $y'(0) = 1$

Solution： $y''-2y'=0$ ，$\lambda^2-2\lambda=0$ ， $\lambda=0,\lambda=2$ $\therefore y_h c_1 e^{0x}+c_2e^{2x}$

※二階常係數非齊次 D.E 特解 y_p 之求解：

求解 $y''+ay'+by=r(x)\Rightarrow$

定理： y_h爲$y''+ay'+by=r(x)$的齊次解(代表 y_h 含有 2 個任意常數項)

若 y_p爲$y''+ay'+by=r(x)$的非齊次特解(代表 y_p 不含任意常數項)

則 $y=y_h+y_p$爲所求的 $y''+ay'+by=r(x)$ 非齊次的特解

Proof： $y_h''+ay_h'+by_h=0$ 成立----(1)

$y_p''+ay_p'+by_p=r(x)$ 成立----(2)

(1)+(2) $[y_h+y_p]''+a[y_h+y_p]+b[y_h+y_p]=r(x)$

與 $[y]''+a[y]+b[y]=r(x)$ 比較 可知其通解為 $y=y_h+y_p$

◎求 y_p 的方法[微分反運算子法] ：

定義：微分運算子= $D=\dfrac{d}{dx}$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}y=Dy\Rightarrow\frac{1}{D}y'=y=\int y'dx=y \text{ ， } y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx^2}y^2=D^2y$$

$$y'''=\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx^3}y^3=D^3y$$

$$y_p''+ay_p'+by_p=r(x)\Rightarrow D^2y+aDy+by=r(x)$$

$D^{-1}=\dfrac{1}{D}=\int$ ， $\dfrac{1}{D^2}=\int\int$ ，則 $y_p=\dfrac{1}{D^2+aD+b}[r(x)]$

(一)當 $r(x)=e^{\beta x}$ (指數函數)，β為常數

※範例 8：Solve $y''+2y'-3y=2e^{x}+3e^{-3x}+4\Rightarrow$ 通解 $y=y_h+y_p$

原式相當於 $(D^2+2D-3)y=2e^{-x}+3e^{3x}+4$

Solution：先求 y_h ：

$$D^2+2D-3 \text{ ， } D=1,D=-3 \text{ ， } \therefore y_h=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$$

再求 y_p ： $y_p=\dfrac{1}{D^2+2-3}[2e^{-x}+3e^{3x}+4]$

$$=\frac{1}{D^2+2D-3}[2e^{-x}]+\frac{1}{D^2+2D-3}[3e^{3x}]+\frac{1}{D^2+2D-3}[4e^{0x}]$$

$$=\frac{1}{(-1)+2(-1)-3}[2e^{-x}]+\frac{1}{3^2+2(3)-3}[3e^{3x}]+\frac{1}{0^2+2(0)-3}[4e^{0x}]$$

$$=\frac{1}{-4}[2e^{-x}]+\frac{1}{12}[3e_{3x}]+\frac{1}{-3}[4e^{0x}]==\frac{-1}{2}[e^{-x}]+\frac{1}{4}[e_{3x}]+\frac{4}{-3}$$

結論： $y_p=\dfrac{1}{D^2+aD+b}[e^{\beta x}]$

(1)分母 D 用β代入，分母 $\neq 0$ 直接計算出解答。

(2)分母 D 幅β代入，分母=0 ，修正公式為 $y_p=\dfrac{1}{(D-\beta)^m}[e^{\beta x}]=\dfrac{x^m}{m!}[e^{\beta x}]$

(二)當 $r(x)=\sin\beta x$ 或 $\cos\beta x$ (三角函數)，β為常數

(1)分母 D^2 項用 $-\beta^2$ 值代入，分母$\neq 0$，直接計算出解答。

(2)分母 D^2 項用 $-\beta^2$ 值代入，分母=0 ，修正公式為 $y_p=\frac{1}{(D^2+\beta^2)}\{\sin\beta x\}=\frac{x}{2\beta}[-\cos\beta x]$ 或

$$y_p=\frac{1}{(D^2+\beta^2)}\{\cos\beta x\}=\frac{x}{2\beta}[\sin\beta x]$$

※範例 9： Solve $(D^2-4)y=2\cos 2x-\sin 3x$

求 y_h：令 $(D^2-4)=0$ $\quad D=2,-2$ $\quad \therefore y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$

求 y_p：$y_p=\frac{1}{D^2-4}[2\cos 2x]-\frac{1}{D^2-4}[\sin 3x]=\frac{1}{-8}[2\cos 2x]-\frac{1}{-13}[\sin 3x]=\frac{-1}{4}\cos 2x+\frac{1}{13}\sin 3x$

通解：$y=y_h+y_p=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{13}\sin 3x$

※範例 10： Solve $y''+4y=\sin 3x\Rightarrow(D^2+4)y=\sin 3x$

(1) y_h: 令 $D^2+4=0$ $\quad D=\pm 2i$ $\quad \therefore y_h=e^{0x}[c_1\cos 2x+c_2\sin 2x]$

(2) $y_p=\frac{1}{D^2+4}[\sin 3x]=\frac{-1}{5}\sin 3x$ $\quad$ 通解：$y=y_h+y_p$

※範例 11： Solve $y''+2y-35y=12e^{5x}+37\sin 5x$

(1) $y_h: D^2+2D-35\Rightarrow(D+7(D-5))=0$

D=-7. , 5 $\quad \therefore y_h=c_1e^{-7x}+c_2e^{5x}$

(2) $y_p: y_p=\frac{1}{(D-5)}[\frac{1}{D+7}(2e^{5x})]+\frac{1}{D^2+2D-35}[37\sin 5x]$

$=\frac{1}{(D-5)}[e^{5x}]+\frac{1}{2D-60}[37\sin 5x]=xe^{5x}+\frac{2D+60}{4D^2-3600}[37\sin 5x]$

$=xe^{5x}-\frac{1}{3700}(2D+60)[37\sin 5x]$ $\quad =xe^{5x}-\frac{1}{3700}[74*5\cos x+60*37\sin 5x]$

(三)當 $r(x)=(3x^2-x+3)$ (二次多項式函數為例)

※範例 12： Solve $y''+2y'+10y=25x^3+3$

$\Rightarrow(D^2+2d+10)y=25x^2+3=(a_2D^2+a_1D+a_0)[25x^2+3]$

依 $\frac{1}{D^2+2D+10}=a_2D^2+a_1D+a_0$ ， 找出 $a_2....a_1.....a_0$ 的係數值

相當 $\Rightarrow(D^2+2d+10)(a_2D^2+a_1D+a_0)=1+0D^1+0D^2+0D^3+0D^4$

(1) 比較 D^0 項的係數： $(10)(a_0)=1\Rightarrow a_0=\frac{1}{10}$

(2) 比較 D^1 項的係數： $10a_1+2a_0=0\Rightarrow a_1=\frac{-1}{5}a_0=\frac{-1}{5}(\frac{1}{10})=\frac{-1}{50}$

(3) 比較 D^2 項的係數： $a_0+10a_2+2a_1=0\Rightarrow\frac{1}{10}+\frac{1}{10}a_2+2(\frac{-1}{50})=0$

$10a_2=\frac{1}{25}-\frac{1}{10}=\frac{-3}{50}\Rightarrow\frac{-3}{500}$

$y_p = (\frac{-3}{500}D^2 - \frac{1}{50}D + \frac{1}{10})[25x^2+3] \quad = (\frac{-3}{500})(50) - (\frac{1}{50})(50x) + (\frac{1}{10})(25x^2+3) = -x + \frac{5}{2}x^2$

※範例 13： Solve $3y'' + 10y' + 3y = 9x + 5\cos x + 2e^{2x}$

(1) $y_h : 3D^2 + 10D + 3 = 0$ ，$(3D+1)(D+3) = 0$ ，所以 $D = -3, \frac{-1}{3}$ $\quad \therefore y_h = c_1 e^{\frac{-1}{3}x} + c_2 e^{-3x}$

(2) $y_p = (a_1 D + a_0)(9x) + \frac{1}{10D}[5\cos x] + \frac{1}{35}[2e^{2x}]$

$= (\frac{-10}{9})(9) + 3x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{2}{35}e^{2x} \quad = -10 + 3x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{2}{35}e^{2x}$

通解： $y = y_h + y_p$

即 $\therefore y = c_1 e^{\frac{-1}{3}x} + c_2 e^{-3x} + -10 + 3x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{2}{35}e^{2x}$