§2–4 複數與複數平面

(甲)虛數 i 的引入

爲了使 $x^2+1=0$ 有解，我們在實數系之外另創了一個新數$\sqrt{-1}$,稱爲虛數單位。十八世紀Euler特以i 來表示$\sqrt{-1}$ ，但當時並未普遍，直到Gauss時代才被廣泛的使用。

(1) $\boldsymbol{i}$的性質：

(a)$i=\sqrt{-1}$ (b)$i^2=-1$ (c)$i^3=-i$ (d)$i^4=1$

一般而言：$i^{4m+k}=i^k$，m爲整數，$k=0,1,2,3$

(2)$\sqrt{負數}$ 的運算：如果$a<0$，則計算$\sqrt{a}$ 時，$\sqrt{a}=\sqrt{-a}\cdot i$ 。

計算：$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}$ =？ 計算：$\sqrt{\dfrac{2}{-3}}$ =？

結論 1：$\sqrt{\boldsymbol{a}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{b}}=\begin{cases}-\sqrt{ab}, & a<0,b<0\\ \sqrt{ab}, & 其他\end{cases}$ **結論 2**：$\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}}=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}, & a>0,b<0\\ \sqrt{\dfrac{a}{b}}, & 其他\end{cases}$

[例題1] 計算下列各小題：

(1)$i^{97}+i^{102}+i^{303}-i^{27}=$？ (2)$\sqrt[3]{-27}i+\sqrt{-9}$ =？

(3)$\sqrt{2}\cdot\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}\cdot\sqrt{7}$ =？ (4)$-\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}}=$？Ans：(1)$i-1$ (2)0 (3)$-\sqrt{210}$ (4)$\dfrac{2}{3}i$

(練習1) 求$\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{30}}\times\sqrt{-5}\times\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-3}}=$？ Ans：$\dfrac{4}{3}i$

(練習2) 若x,y爲實數，且$x+y=-7,xy=4$，求$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=$？ Ans：-11

(乙)複數標準式與基本運算

(1)複數的定義：

(a)假定$\boldsymbol{i}$ 表示$\sqrt{-1}$ ，而a,b均爲實數，則所有像$\boldsymbol{a+bi}$這樣的數，都叫做複數。
所有的複數所成的集合稱爲複數系。複數系(C)=$\{a+b\,i|a,b$爲實數$\}$

(b)複數的標準式：(實數)+(實數) $\boldsymbol{i}$
一個複數z寫成$a+bi(a,b$爲實數$)$的形式，則$a+bi$就稱爲複數z的標準式。
其中a稱爲z的實部，b稱爲z的虛部。符號：$a=\text{Re}(z)$，$b=\text{Im}(z)$。

例如：$3+4i$的實部爲 3，虛部爲 4。$2-\sqrt{3}\ i$的實部爲 2，虛部爲$-\sqrt{3}$ 。

(c)虛數的定義：
設複數$z=a+bi(a,b$爲實數$)$
①若$b=0$，則$z=a+bi=a$爲實數，即虛部爲 0 的複數爲實數，
故實數系包含在複數系中。

②若$b\neq 0$，則$z=a+bi$爲虛數$\begin{cases} a=0\ ,\ z=bi\ ,\ \text{稱爲純虛數} \\ a\neq 0\ ,\ z=a+bi\ ,\ \ \text{稱爲虛數} \end{cases}$

數系的關係：N⊂Z⊂Q⊂R⊂C

(2)複數的相等：
設$z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ $(a,b,c,d$均爲實數$)$，則$z_1=z_2 \Leftrightarrow a=c$且$b=d$。

(3)複數的加減乘除：設a,b,c,d爲實數
(a)加法：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
(b)減法：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
(c)乘法：$(a+bi)\times(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$
例如：$(3+5i)(2-4i)=$

(d)除法：若$c+di\neq 0$，則$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$

例如：$\dfrac{2+3i}{1+4i}=$

(e)複數運算的定義能像實數運算一樣滿足交換律、結合律、分配律。

[例題2] 化簡$(2+5i)(7+3i)+\frac{3-i}{2+4i}$ 爲標準式。 Ans：$\frac{-9}{10}+\frac{403}{10}i$

[例題3] 設複數 z 的虛部爲$-\frac{1}{2}$，且$\frac{1}{z}$ 的實部爲$\frac{3}{5}$，則 $z=$？

Ans：$\frac{1}{6}-\frac{1}{2}i$ 或 $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

[例題4] 求 $8+6i$ 的平方根。 Ans：$3+i$，$-3-i$。

(練習3) 設 $z\in C$，且實數 $\text{Re}(z)=\frac{2}{3}$，$\frac{1}{z}$ 的虛部 $\text{Im}(\frac{1}{z})=\frac{-9}{13}$，求 $z=$？

Ans：$\frac{2}{3}+i$ 或 $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}i$

(練習4) 求 $5+12i$ 的平方根。 Ans：$\pm(3+2i)$

(練習5) 將下列各複數化成 $a+bi$ 的形式：

$(1)(-2-3i)-(-\frac{1}{2}-\sqrt{2}i)$ $(2)(2+5i)(-7-2i)$

$(3)(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)$ $(4)\frac{5+3i}{2+7i}$

Ans：(1)$-\frac{3}{2}+(-3+\sqrt{2})\ i$ (2)$-4-39i$ (3)$5+0i$ (4)$\frac{31}{53}-\frac{29}{53}i$

(4)共軛複數：

(a)設複數z的標準式為$a+bi$，我們稱$a-bi$為$a+bi$的共軛複數。

符號$\overline{z}=a-bi$。即$a+bi$與$a-bi$互為共軛複數。

$(a+bi)+(a-bi)=$__________為實數

$(a+bi)\times(a-bi)=$__________為實數

例如：$\overline{3+4i}=3-4i$，$\overline{-1+4i}=-1-4i$，$\overline{-\sqrt{5}}=-\sqrt{5}$，$\overline{3i}=-3i$。

(b)z為實數$\Leftrightarrow \overline{z}=z$

z為純虛數或 $0\Leftrightarrow \overline{z}=-z$

(c)共軛複數的運算性質：設z_1、z_2為複數

① $\overline{z_1+z_2}=$__________ ② $\overline{z_1-z_2}=$__________

③ $\overline{z_1\times z_2}=$__________ ④ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=$____________

⑤ $\overline{(\overline{z})}=$____________

(練習6) 試求$\frac{8+5i}{3-2i}$的共軛複數。 Ans：$\frac{14}{13}-\frac{31}{13}i$

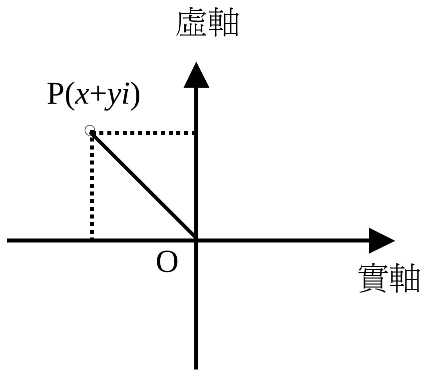
(練習7) 設 $z=3+2i$，試求 $\frac{z-1}{z+1}$ 之共軛複數。Ans：$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i$

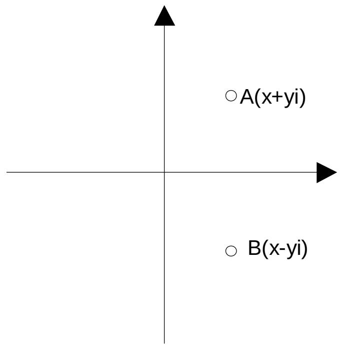
(丙)複數平面

(1)複數平面的引進：
複數是表示成 $x+yi$(x,y 爲實數)的數，我們將複數 $x+yi$ 對應坐標平面上的點(x,y)，我們發現這種對應是一對一的對應。即任一個複數都可找到坐標平面上唯一一點與之對應，反之，給定坐標平面上一個點，可找到唯一一個複數與之對應。這種與複數對應的平面稱爲**複數平面**，x 軸又稱**實軸**，y 軸又稱爲**虛軸**。

例如：x 軸上的點($-3,0$)，代表實數-3，y 軸上的點($0,6$)代表純虛數 $6i$，
點($-4,6$)代表$-4+6i$。

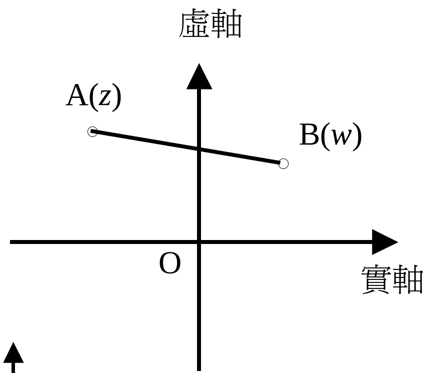
例如：設 $z=x+yi$，則 $\bar{z}=x-yi$。如果複數平面上 A,B 兩點代表 z 與 $\bar{z}$，則 A,B 對稱於實軸。





(2)複數的絕對值：
$z=x+yi$的絕對值定義成複數z所代表的點與原點O的距離，

如上圖的$\overline{OP}$， 符號記爲|z|。

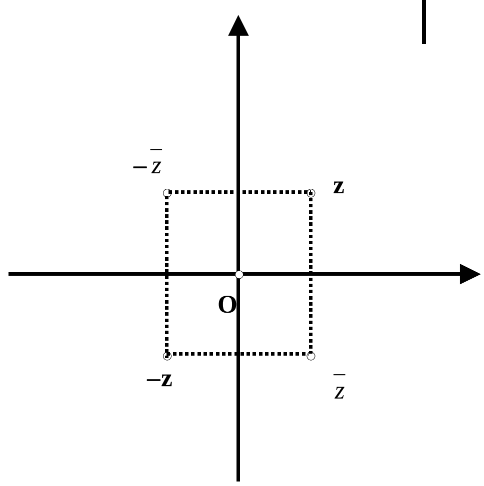


(a)$|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}$

(b)設z,w爲兩個複數，複數平面上A、B分別代表z,w：

$|z-w|=\overline{AB}$

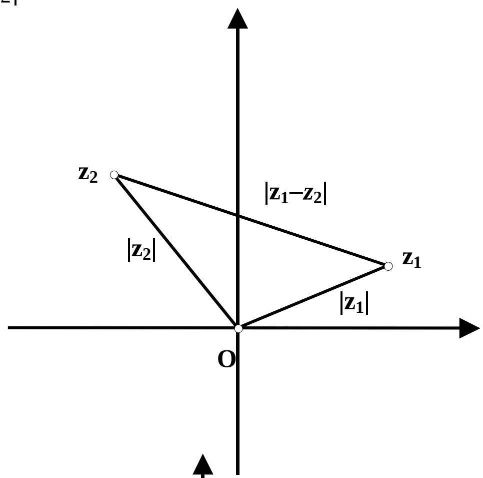
(c)複數絕對性質($z,z_1,z_2\in C$)
①$|z|=|-z|=|\bar{z}|=|\overline{-z}|$



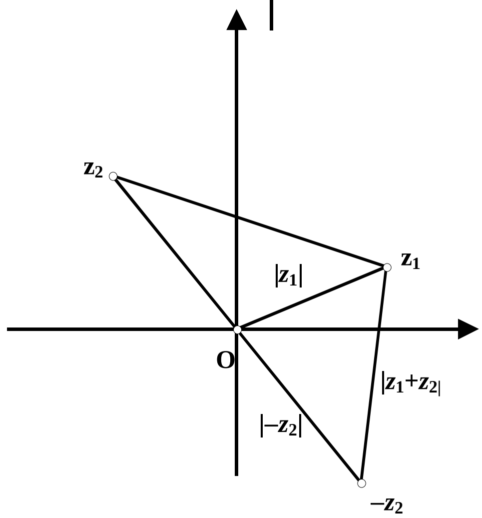
②$|z|^2=z\times\bar{z}$(若$|z|=1, z\times\bar{z}=1$)

③$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$

④$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$



⑤$|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$



⑥$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

[例題5] 求下列各複數的絕對值：

(a)$|-7+3i|$　　(b)$\left|\frac{(2+i)^2(3+i)^3}{(1-3i)(1-2i)^4}\right|$　Ans：(a)$\sqrt{58}$　(b)2

[例題6] 設 $z\in$C，在複數平面上，

(1)試問滿足$|z-3|=|z-i|$之複數 z 所代表的點所成的圖形是什麼？

(2)試問滿足$|z-(3-2i)|=4$ 之複數 z 所代表的點所成的圖形是什麼？

Ans：(1)直線 (2)圓

(練習8) 試求下列各複數的絕對值：

(a)$3+i$ (b)$-1+5i$ (c)$3i$ (d)$(3+i)(-1+5i)$ (e)$\dfrac{3+i}{-1+5i}$

Ans：(a)$\sqrt{10}$ (b)$\sqrt{26}$ (c)3 (d)$2\sqrt{65}$ (e)$\dfrac{\sqrt{65}}{13}$

(練習9) 設 $z\in$C，在複數平面上，

(1)試問滿足$|z-3+6i|=|z-7i|$之複數 z 所代表的點所成的圖形是什麼？

(2)試問滿足$|z-6-9i|=6$ 之複數 z 所代表的點所成的圖形是什麼？

Ans：(1)直線 (2)圓

(練習10) 設$z\in$C，設$|z|=2$，則$|z+3|^2+|z-3|^2=$？ Ans：22

(提示：$|z+3|^2=(z+3)(\overline{z+3})$，$|z-3|^2=(z-3)(\overline{z-3})$)

(練習11) 設 $z\in$C，試分別求 $2-3i\bar{z}$ 對於實軸、虛軸、原點成對稱的點所表示的複數。Ans：$2+3iz$、$-2-3iz$、$-2+3i\bar{z}$

(丙)一元二次方程式的解

(1)解一元二次程式：

$ax^2+bx+c=0$，$a\neq 0$，$a,b,c\in$R

$a(x+\dfrac{b}{a}x)=-c$，$a(x+\dfrac{b}{2a})^2=-c+\dfrac{b^2}{4a}=\dfrac{-4ac+b^2}{4a}$

$(x+\dfrac{b}{2a})^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$，$x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，故$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(2) 一元二次程式根的性質：

$ax^2+bx+c=0$ (a,b,c為實數，$a\neq0$)，根的判別式 $D=b^2-4ac$

(a)D>0⇔兩相異實根 (b)D=0⇔兩相等實根 (c)D<0⇔兩共軛虛根

注意：以上的結論有一個重要的前提，就是*a,b,c*為實數。

(3) $ax^2+bx+c=0$ (a,b,c為有理數，$a\neq0$)，

(a)D=(有理數)^2>0 ⇔ 兩相異有理根

(b)D≠(有理數)^2 >0⇔兩相異無理根

(c)D=0⇔兩相等有理根

(4)根與係數的關係：

設一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$ 有兩根為α,β

(a)$a\alpha^2+b\alpha+c=a\beta^2+b\beta+c=0$

(b)$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ ，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

(c)$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta) \Rightarrow$ 方程式$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

因此得知若已知兩根α,β ，計算$\alpha+\beta$ ，$\alpha\beta$ ，則可求得方程式。

[例題7] 試解下列方程式：

(1)$x^2+4x+2=0$ (2)$3x^2+5x+4=0$ Ans：(1)$x=-2\pm\sqrt{2}$ (2)$\dfrac{-5\pm\sqrt{23}i}{6}$

[例題8] 試求以下列數字爲二根的整係數方程式。

(1)$\frac{1}{2}$、$\frac{-1}{3}$ (2)$1+\sqrt{2}$ 、$1-\sqrt{2}$ (3)$4-3i$、$4+3i$

Ans：(1)$6x^2-x-1=0$ (2)$x^2-2x-1=0$ (3)$x^2-8x+25=0$

[例題9] 設a爲實數，且方程式 $4x^2-(3a+i)x+a-i=0$ 有一實根α，試求α之值與另一個根。

Ans：$\alpha=-1$、$\frac{1+i}{4}$

[例題10] 設α、β爲方程式$x^2+2x+3=0$ 的二根，求下列各式的值。

(a)$\alpha^2+\beta^2$ (b)$\alpha^3+\beta^3$ (c)$\alpha^4+\beta^4$ (d)$(\alpha^2+4\alpha+3)(\beta^2+4\beta+3)$

(e)$\frac{\alpha}{\alpha^2+3}+\frac{\beta}{\beta^2+3}$ 。Ans：(a)-2 (b)10 (c)-14 (d)12 (e)-1

[例題11] 設一元二次方程式$x^2+16x+4=0$ 的二根爲α、β，請求$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=$？

Ans：-20

(練習12) 試解下列的方程式：

(1)$5x^2-7x-1=0$　(2)$x^2-4x+5=0$　(3)$3x^2+2x+1=0$

Ans：(1)$\frac{7\pm\sqrt{69}}{10}$ (2)$x=2\pm i$　(3)$x=\frac{-1\pm\sqrt{2}i}{3}$

(練習13) 試解方程式 $x|x|-3|x|+2=0$。　Ans：$x=1,2$ 或$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$

(練習14) 設a為實數，且 $3x^2+(a+i)x+2i-6=0$ 有實根，求此方程式的解。

Ans：-2、$1-\frac{i}{3}$

(練習15) 設$x^2-2x+3=0$ 的二根為α、β，求下列各式的值：

(1)$\alpha^2+\beta^2$　(2)$\alpha^3+\beta^3$　(3)$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$　(4)$\frac{\beta^3}{\alpha^2+3}+\frac{\alpha^3}{\beta^2+3}$。

Ans：(1)-2 (2)-10 (3)$\frac{2}{3}$ (4)$\frac{-7}{3}$

(練習16) 設α、β為$x^2+6x+4=0$ 之二根，則$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=$?　Ans：$-10$

(練習17) 設α、β為$x^2-3x+5=0$ 之二根，試分別為以下列二數為根之一元二次方程式。

(1)$\alpha+\beta$、$\alpha\beta$　(2)$\frac{\beta}{\alpha^2}$、$\frac{\alpha}{\beta^2}$

Ans：(1)$x^2-8x+15=0$ (2)$25x^2+18x+5=0$

(練習18) 甲乙二生同解一整係數方程式，甲生判別式計算錯誤，得二根為$\frac{13}{12}$、$\frac{-7}{24}$，乙生抄錯x^2的係數，得二根為$\frac{5}{4}$、$\frac{-3}{10}$，則正確的方程式為何？

Ans：$48x^2-38x-15=0$

(練習19) 設k為實數，二次方程式$kx^2+2x+3=0$ 沒有實根，求k之範圍。

Ans：$k>\frac{1}{3}$

(練習20) 設k為自然數，$3x^2+10x+k=0$ 的二根均為有理數，求k之值。

Ans：$k=3$ 或 7 或 8

[例題12] 令$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，求下列各式的值：

(1) ω^2 (2) ω^3 (3)$1+\omega+\omega^2$ (4)$\dfrac{1}{\omega}$ (5)$(2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega^4)(2-\omega^8)$

Ans：(1) $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ (2)1 (3)0 (4) $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ (5)49

(練習21) 令$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，求下列各式的值：

(1) $\omega^{31}+\omega^{32}+\ldots+\omega^{172}=$？

(2)$(1-2\omega-2\omega^2)(2+2\omega-3\omega^2)(3-4\omega+3\omega^2)=$？

Ans：(1) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (2)105

複數與實數的比較：

數系 / 性質	實數系(R)	複數系(C)
定義與關係	可表示在數線上	可表示在複數平面上
加法運算	加法有封閉性 加法有結合律 加法有交換律	加法有封閉性 加法有結合律 加法有交換律
乘法運算	乘法有封閉性 乘法有結合律 乘法有交換律 乘法對加法有分配律	乘法有封閉性 乘法有結合律 乘法有交換律 乘法對加法有分配律

不等性質	設 $a,b\in$R $a-b>0\Leftrightarrow a>b$ 實數的大小次序關係： 設 x,y,z 均爲實數，則 (a)下列三式恰有一成立： $x>y$，$x=y$，$x<y$ (三一律) (b)若 $x<y$，$y<z$，則 $x<z$。 (c)$x<y \Leftrightarrow x+z<y+z$ (d)若 $z>0$，則 $x<y \Leftrightarrow xz<yz$。 (e)若 $z<0$，則 $x<y \Leftrightarrow xz>yz$。	**虛數不能比較大小。**
絕對值的性質	a 爲實數， $\|a\|$代表數線上，a 所代表的點到坐標原點的距離。 設 x,y 爲實數 $\|xy\|=\|x\|\|y\|$ $\|\frac{x}{y}\|=\frac{\|x\|}{\|y\|}$ $(y\neq 0)$ $\|\|x\|-\|y\|\|\leq\|x\pm y\|\leq\|x\|+\|y\|$	a 爲複數，$a=x+yi$ $\|a\|$代表複數平面上，a 所代表的點到原點 O 的距離。 設 x,y 爲複數 $\|xy\|=\|x\|\|y\|$ $\|\frac{x}{y}\|=\frac{\|x\|}{\|y\|}$ $(y\neq 0)$ $\|\|x\|-\|y\|\|\leq\|x\pm y\|\leq\|x\|+\|y\|$
其它	設$a,b\in$R， $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$。 $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0$ $a^2\geq 0$ $-\|a\|\leq a\leq\|a\|$	**設$a,b\in$C** **$a-b>0$ 不能保證$a>b$。** **$a^2+b^2=0$ 不能保證$a=b=0$** **不能保證$a^2\geq 0$** **不能保證$-\|a\|\leq a\leq\|a\|$**

綜合練習

(1) 請化簡下列兩式：

(a)$\frac{5}{\sqrt{-3}}+\frac{(\sqrt{3}+2)i}{3}+\frac{2i^2}{\sqrt{-12}}+i=$？

(b)$\frac{(2+i)(7+3i)}{3-i}=$？

(c)$i^{81}+i^{82}+\ldots+i^{366}=$？

(2) 下列各式何者為真？

(A)$\sqrt{6}=\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$　(B)$\sqrt{-6}=-\sqrt{2}\times\sqrt{3}$　(C)$\sqrt{\frac{3}{-2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$

(D) $\sqrt{\frac{3}{-2}}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$。

(3) 設a,b為兩個複數，下列敘述何者正確？

(A)若$z=a+bi$為複數，則b為複數z的虛部。 (B)若$a+bi=0$，則$a=b=0$

(C)若$a^2>b^2$，則$a^2-b^2>0$　(D)若$a^2-b^2>0$，則$a^2>b^2$　(E)若$a^2+b^2=0$，則$a=b=0$

(4) 設a,b為實數，下列選項何者為真？

(A)$(\sqrt{-1})^2=\sqrt{(-1)^2}$　(B)$\sqrt{\frac{-1}{1}}=\sqrt{\frac{1}{-1}}$　(C)$|1+3i|>|-1+3i|$ (D)設a,b為實數，$b>a$，則$\sqrt{a-b}=\sqrt{b-a}\ i$　(E)$5i>4i$

(5) 設 z 為複數，z 的虛部為-2，$\frac{1}{z}$ 的實部為$\frac{3}{13}$，則 $z=$？

(6) 請問滿足下列條件的複數所代表的點在複數平面上所形成的圖形：

(a)$|z-3i|=8$　　(b)$|z+5-7i|=|z-4-i|$

(7) 設 a,b 為實數，且$\frac{2a+i}{4+3i}$ 之共軛複數為$-5+bi$，則 $a+b=$？

(8) 設a為實數，若$x^3+ax^2+x+2=0$ 有純虛根，求$a=$？

(9) 設$i=\sqrt{-1}$，若 $1-i$為$x^2-cx+1=0$ 之一根，則複數$c=$？

(10) 設$x\in$R且$i(x+i)^3$為實數，求x的值。

(11) 設a,b為實數，滿足$a+b=-12$ 且$ab=3$，則$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=$？

(12) 設 a,b 為實數，滿足 $a+b=-13$ 且 $ab=9$，則$\sqrt{a}+\sqrt{b}=$？

(13) 設 x,y 為實數，且 $x+y-4i=1+xyi$，求$\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}=$？

(14) 試求$-5+12i$ 的平方根。

(15) 設$z\in$C，且$z^2=i$，求$z^3+\frac{1}{z^3}$之值。

(16) 設 $z=\frac{(1+2i)(2-i)(4+5i)}{1-2i}$，則$|z|=$？

(17) 試解下列方程式：

(a)$6x^2-x-12=0$　(b)$x^2-3\sqrt{2}\ x+(3+\sqrt{2}\ )=0$　(c)$x^2+|2x-1|=3$　(d)$\frac{3x+1}{x-3}+5\cdot\frac{x-3}{3x+1}=6$

(18) 設$x^2+kx+6=0$ 試求滿足下列條件的k值。
(a)二根的比為 2：1。　(b)二根平方和為 5。

(19) 甲乙二生解x之一元二次方程式，甲看錯判別式得二根 4,-3，乙看錯x^2項係數，二根得 3,-1，試問若無其他錯誤，求正確二根。

(20) 試解方程式$x^2-5|x|+6=0$。

(21) 設$m\in Q$，方程式$x^2-(\sqrt{3}\ +1)x+m\sqrt{3}\ -2=0$ 有有理根，求m的值。

(22) 設$m\in R$，若$x^2+2mx+(4m-3)=0$ 無實根，求m的範圍。

(23) 設k為自然數，方程式 $3x^2+10x+k=0$ 的二根均為有理數，求k的值。

進階問題

(24) 設 a,b,c 為三角形的三邊長，若二次方程式$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ 有兩相等實根，試證明此三角形為正三角形。

(25) 令$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，則$\omega$滿足$\omega^3=1$，$1+\omega+\omega^2=0$，請利用這些性質，
求下列各式的值：
(a)$(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)$
(b)$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\ldots+\omega^{82}$
(c)$(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16})$
(d)$1-\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\omega^3}+\ldots..-\frac{1}{\omega^{99}}$
(e)$\frac{1}{1+\omega}+\frac{1}{1+\omega^2}+\frac{1}{1+\omega^3}+\ldots+\frac{1}{1+\omega^9}$

(26) 利用代換法解下列各方程式：
(a)$(x^2+3x+1)^2-5(x^2+3x)-1=0$
(b)$(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)=168x^2$
[提示：$(x^2+7x+6)(x^2+5x+6)-168x^2=0\Rightarrow(x^2+6+7x)(x^2+6+5x)-168x^2$
$\Rightarrow(x^2+6)^2+12x(x^2+6)-133x^2=0\Rightarrow(x^2+6+19x)(x^2+6-7x)=0$]
(c)$x^2+\frac{1}{x^2}\ +4=5(x-\frac{1}{x})$　[提示：令$t=x-\frac{1}{x}$，$t^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$]

(27) 甲乙二人同解一個一元二次方程式，因甲誤寫一次項係數，乙誤寫常數項，故甲乙二人所得的二根之絕對值之比各為 2：3 與 5：2，且甲之大根為$-\frac{4}{5}$，乙小根為$\frac{2}{3}$，求原方程式。

(28) 設$x^2-x+2=0$ 的兩根為α、β，$x^2-3x+4=0$ 的兩根為γ、δ，
求$(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma+\delta)(\gamma+\delta+\alpha)(\delta+\alpha+\beta)$的值。

(29) 設 $5x^2-7x-1=0$ 的兩根為α、β，求以$|\alpha|$、$|\beta|$之小數部分為根的方程式。

(30) 設二次方程式$x^2+(m-1)x+m+1=0$ 有兩個整數根，則整數m=？

(31) (a)求 $5-12i$的二個平方根。

(b)再求複係數方程式$z^2-2(1+i)z-5+14i=0$

綜合練習解答

(1) (a) $\frac{(5-3\sqrt{3})}{3}i$ (b) $2+5i$(c) $-1+i$

(2) (D)

(3) (C)

(4) (B)(D)

(5) $3-2i$ 或$\frac{4}{3}-2i$

(6) (a)圓 (b)直線

(7) -20

(8) 2 [提示：可以令虛根爲 ki，其中 k 爲不等於 0 的實數，再代入原方程式，求 k 的值。]

(9) $\frac{3-i}{2}$

(10) $x=0$ 或$\pm\sqrt{3}$

(11) $-12-2\sqrt{3}$

(12) $\sqrt{19}\ i$[注意：$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=19$，因爲$a<0$ 且$b<0$，所以$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{19}\ i$($-\sqrt{19}\ i$不合)]

(13) $\frac{\sqrt{17}}{2}\ i$

(14) $2+3i$ 或$-2-3i$

(15) $\pm\sqrt{2}$ [提示：$(z^3+\frac{1}{z^3})^2=z^6+2+\frac{1}{z^6}=2$，所以$z^3+\frac{1}{z^3}=\pm\sqrt{2}$]

(16) $\sqrt{205}$

(17) (a)$x=\frac{3}{2}$或$\frac{-4}{3}$ (b)$x=\sqrt{2}+1$ 或 $2\sqrt{2}-1$ (c) $x=1-\sqrt{3}$ 或$-1+\sqrt{5}$ (d)$x=-2$ 或 8

(18) (a)$k=\pm3\sqrt{3}$ [提示：令兩根爲 $2a,a$，再利用根與係數的關係去求a，再求k](b)$k=\pm\sqrt{17}\ \sqrt{3}$ [提示：令兩根爲α、β，已知$\alpha^2+\beta^2=5$，用根與係數的關係，求k]

(19) $\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$

(20) $x=\pm2$ 或±3 [提示：分成 $x\geq0$，$x\leq0$ 兩種情形來討論方程式的解]

(21) $m=2$ 或-1

(22) $1<m<3$

(23) $k=3$ 或 7 或 8

(24) 利用判別式=0，化簡成$[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0$，可得$a=b=c$。

(25) (a)2 (b) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ (c)16 (d)$\sqrt{3}\ i$ (e)$\frac{9}{2}$

(26) (a)$x=0$ 或-3 或$\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$ [提示：令$t=x^2+3x$，再將原方程式化成

$t^2-3t=0 \Rightarrow t=0$ 或 3，再解x](b)$x=1$ 或 6 或$\dfrac{-19\pm\sqrt{337}}{2}$ (c)$x=1\pm\sqrt{2}$ 或$\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

(27) $75x^2-175x+72=0$

(28) 112

(29) $10x^2-2(\sqrt{69}-5)x+(9-\sqrt{69})=0$

(30) 7 或-1

(31) (a)$-3+2i$，$3-2i$(b)$-2+3i$，$4-i$

[提示：方程式配方得 $x-(1+i)]^2=5-14i+(1+i)^2$，進一步化成 $[x-(1+i)]^2=5-12i$，由(a)可知$x-(1+i)=-3+2i$或 $3-2i$，

所以得知$x=-2+3i$，$4-i$]