泰勒級數

- *n*次泰勒多項式(Taylor Polynomial of Degree *n*)
- 馬克勞林級數(Maclaurin Series)
- 泰勒級數(Taylor Series)

- 何謂泰勒多項式(Taylor Polynomial)？

若一非多項式函數可由多項式函數來近似，則這近似的多項式函數稱爲泰勒多項式。

舉例來說，欲估計 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 附近的值

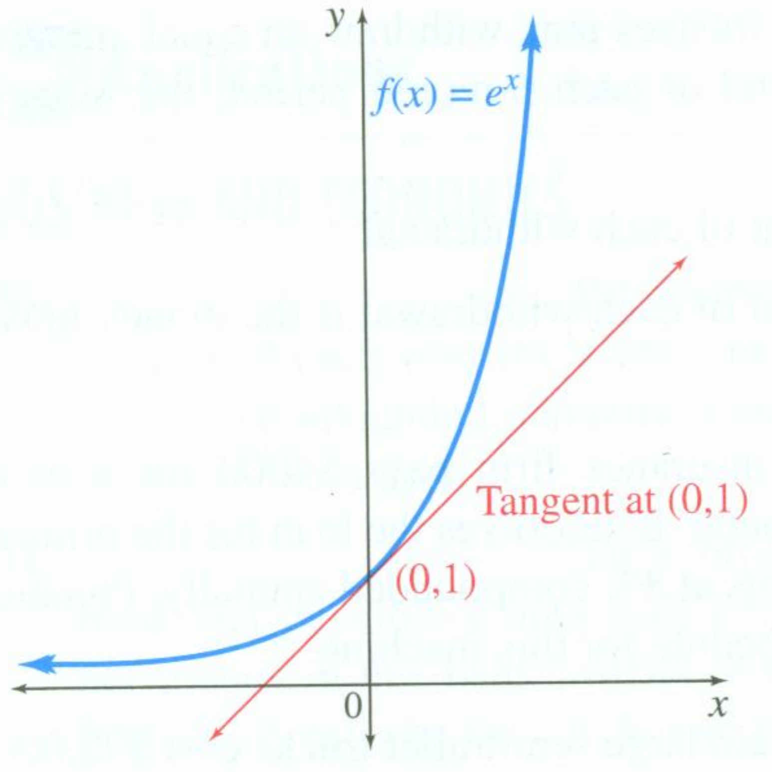

FIGURE 3

$f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 的切線方程式爲

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = f(0) + f'(0) \cdot x$$

令 $P_1(x) = f(0) + f'(0) \cdot x$

$$= e^0 + e^0 \cdot x$$

$$= 1 + x$$

則 $P_1(x)$ 稱爲函數 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 的一次泰勒多項式

x	$P_1(x) = 1 + x$	$f(x) = e^x$
−1	0	.3678794412
−.1	.9	.904837418
−.01	.99	.9900498337
−.001	.999	.9990004998
0	1	1
.001	1.001	1.0010005
.01	1.01	1.010050167
.1	1.1	1.105170918
1	2	2.718281828

可發現只有當 x 靠近 0的時候，用 $P_1(x)$ 去估計 $f(x)$ 結果才會準確。

舉例來說，欲估計 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 附近的值

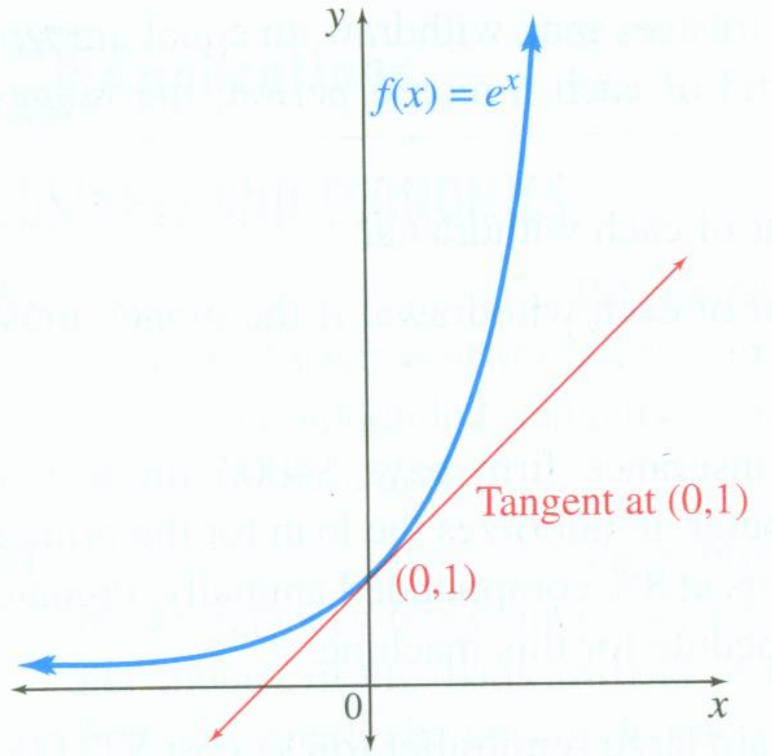

FIGURE 3

$\because P_1(x) = f(0) + f'(0) \cdot x$

$\therefore P_1(0) = f(0)$，$P_1'(0) = f'(0)$

現考慮用二次多項式 $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

來估計 $f(x) = e^x$

則 $\begin{cases} P_2(0) = f(0) \\ P_2'(0) = f'(0) \\ P_2''(0) = f''(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = e^0 \\ a_1 = e^0 \\ 2a_2 = e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1/2 \end{cases}$

亦即函數 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 的二次泰勒多項式爲 $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

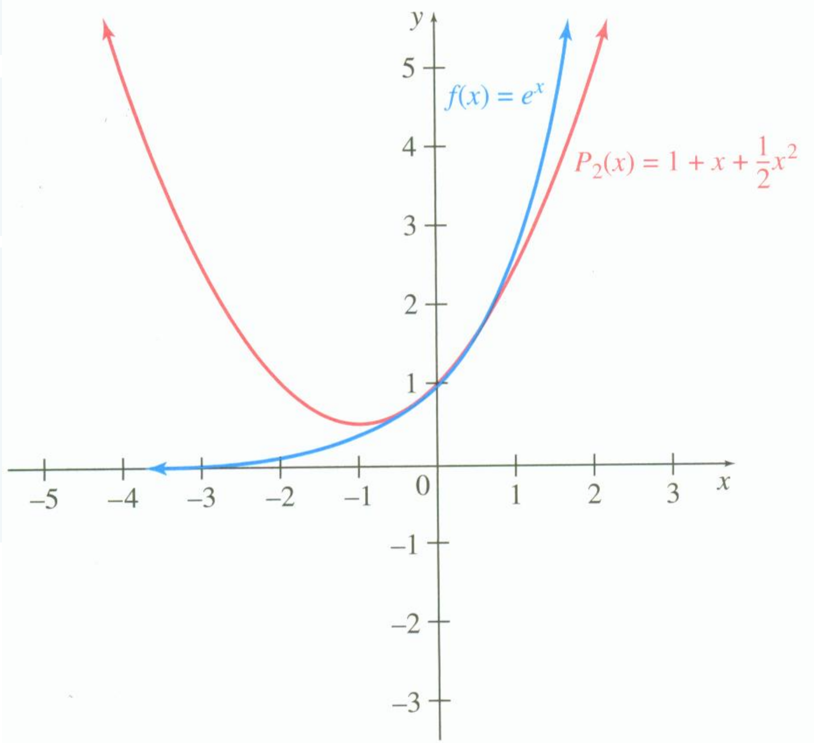

FIGURE 4

x	$P_1(x) = 1 + x$	$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$	$f(x) = e^x$
−1	0	.5	.3678794412
−.1	.9	.905	.904837418
−.01	.99	.99005	.9900498337
−.001	.999	.9990005	.9990004998
0	1	1	1
.001	1.001	1.0010005	1.0010005
.01	1.01	1.01005	1.010050167
.1	1.1	1.105	1.105170918
1	2	2.5	2.718281828

亦即函數 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 的二次泰勒多項式為 $P_2(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$

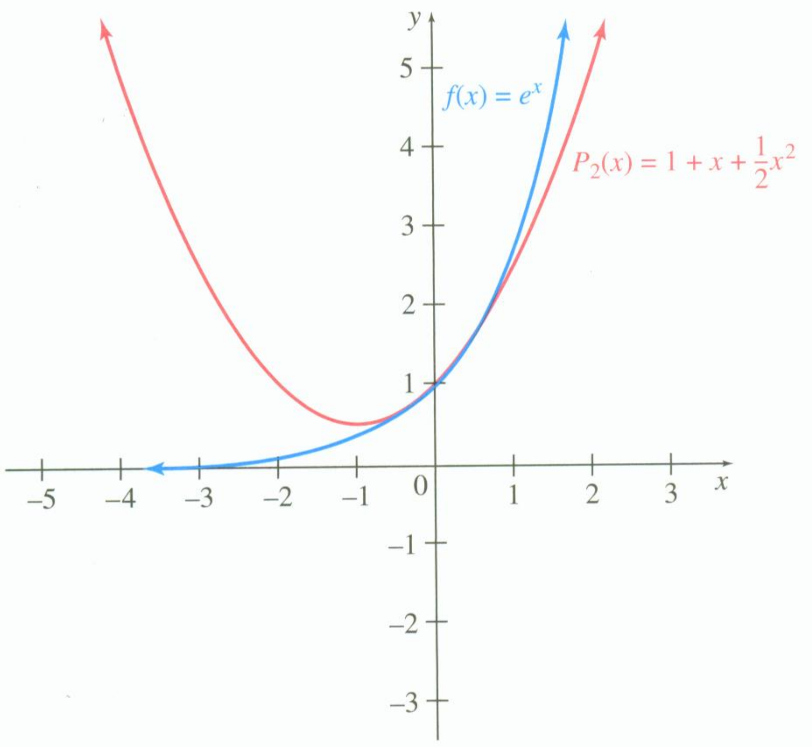

FIGURE 4

雖然 $P_2(x)$ 估計的結果比 $P_1(x)$ 好，但其準確度仍隨著 x 距離 0 愈遠愈差

再考慮由三次多項式

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

估計 $f(x) = e^x$，則

$$P_3^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

$$P_3^{(2)}(x) = 2a_2 + 6a_3x$$

$$P_3^{(3)}(x) = 6a_3$$

$$\begin{cases} P_3(0) = f(0) \\ P_3^{(1)}(0) = f^{(1)}(0) \\ P_3^{(2)}(0) = f^{(2)}(0) \\ P_3^{(3)}(0) = f^{(3)}(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = e^0 \\ a_1 = e^0 \\ 2a_2 = e^0 \\ 6a_3 = e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = \dfrac{1}{2} \\ a_3 = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

亦即函數 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 的三次泰勒多項式爲 $P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

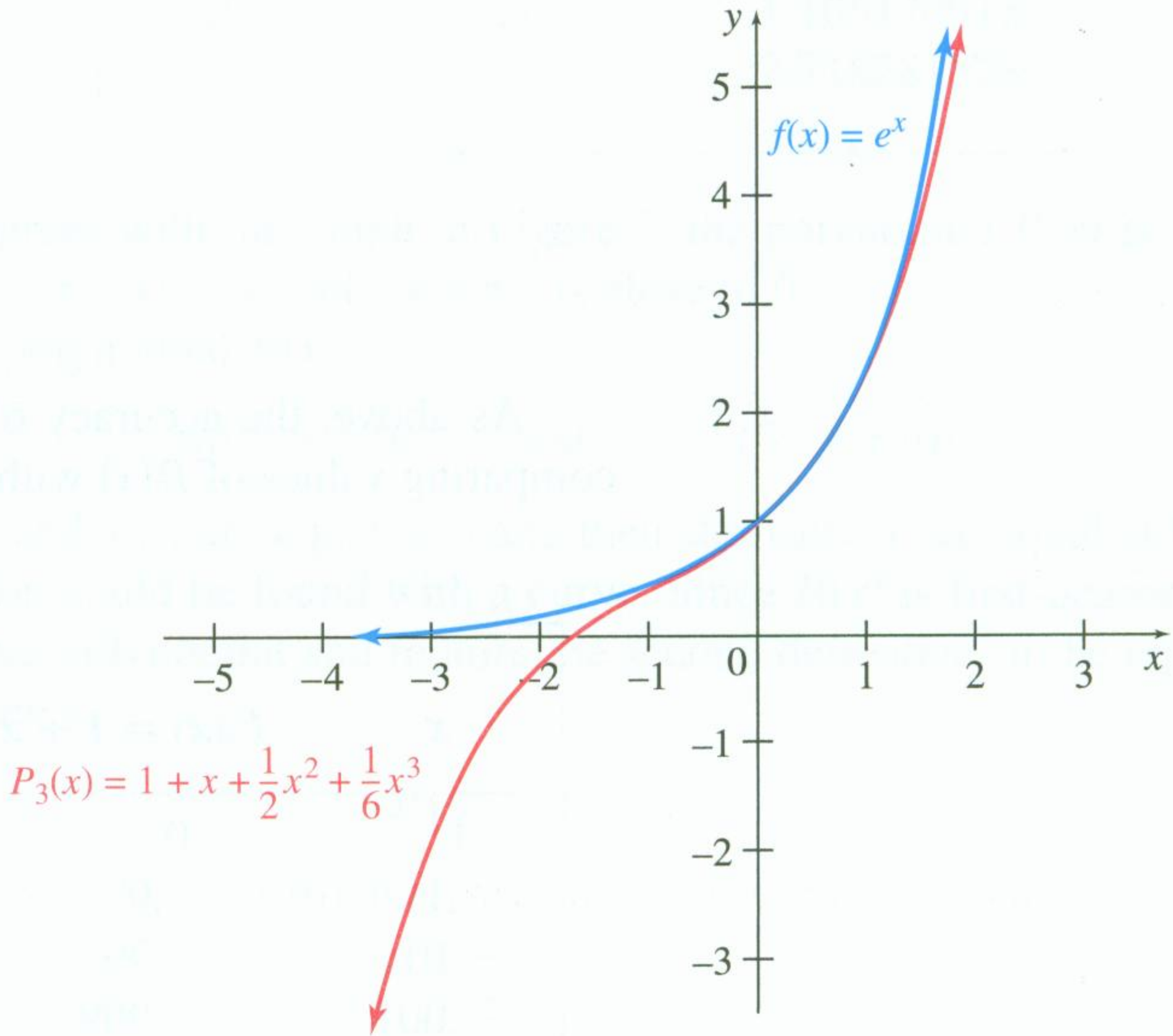

FIGURE 5

現考慮一般式，亦即由 n 次多項式

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ 來估計

$f(x) = e^x$ ，則

$$
\begin{cases}
P_n^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \ldots + n \cdot a_nx^{n-1} \\
P_n^{(2)}(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} \\
P_n^{(3)}(x) = 2 \cdot 3a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} \\
\vdots \\
P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n = n!\,a_n
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} P_n(0) = f(0) \\ P_n^{(1)}(0) = f^{(1)}(0) \\ P_n^{(2)}(0) = f^{(2)}(0) \\ \vdots \\ P_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = e^0 \\ 1!\,a_1 = e^0 \\ 2!\,a_2 = e^0 \\ \vdots \\ n!\,a_n = e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = \dfrac{1}{1!} \\ a_2 = \dfrac{1}{2!} \\ \vdots \\ a_n = \dfrac{1}{n!} \end{cases}$$

亦即函數 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 的 n 次泰勒多項式爲 $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$

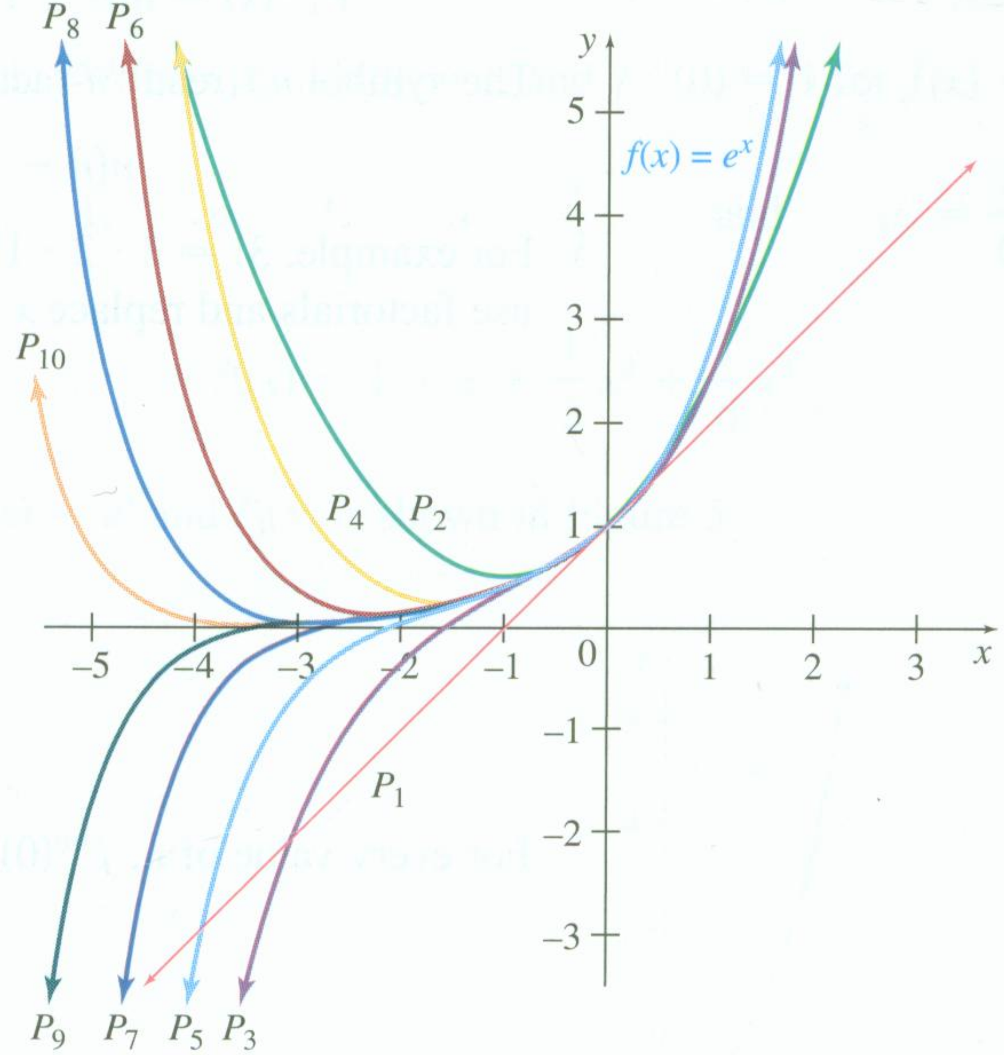

FIGURE 6

- 函數 $f(x) = e^x$ 的泰勒多項式

函數$f(x) = e^x$在 $x = 0$ 的 n 次泰勒多項式(Taylor Polynomial of Degree n)爲

$$P_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$= \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i$$

- 範例一

利用五次泰勒多項式去估計 $e^{-0.2}$

解：$\because P_5(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$

且 $x = -0.2$

$$\therefore P_5(-0.2) = 1 + \frac{1}{1!}(-0.2) + \cdots + \frac{1}{5!}(-0.2)^5 \approx 0.8187307$$

由於 $x = -0.2$ 靠近 0，所以其估計值

很準確 $(e^{-0.2} = 0.8187308)$

- 函數 $f(x)$的 n 次泰勒多項式

若函數 $f(x)$在 $x = 0$的地方為 n 次可微，則 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的 n 次泰勒多項式為

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

- 範例二

請求出函數 $f(x)=\sqrt{x+1}$ 在 $x=0$ 的四次泰勒多項式

解：

Derivative	Value at 0
$f(x)=\sqrt{x+1}=(x+1)^{1/2}$	$f(0)=1$
$f^{(1)}(x)=\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}=\frac{1}{2(x+1)^{1/2}}$	$f^{(1)}(0)=\frac{1}{2}$
$f^{(2)}(x)=-\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}=\frac{-1}{4(x+1)^{3/2}}$	$f^{(2)}(0)=-\frac{1}{4}$
$f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}(x+1)^{-5/2}=\frac{3}{8(x+1)^{5/2}}$	$f^{(3)}(0)=\frac{3}{8}$
$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}(x+1)^{-7/2}=\frac{-15}{16(x+1)^{7/2}}$	$f^{(4)}(0)=-\frac{15}{16}$

$$\therefore P_4(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$

- 範例二

請求出函數 $f(x)=\sqrt{x+1}$ 在 $x=0$ 的四次泰勒多項式

解：

Derivative	Value at 0
$f(x)=\sqrt{x+1}=(x+1)^{1/2}$	$f(0)=1$
$f^{(1)}(x)=\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}=\frac{1}{2(x+1)^{1/2}}$	$f^{(1)}(0)=\frac{1}{2}$
$f^{(2)}(x)=-\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}=\frac{-1}{4(x+1)^{3/2}}$	$f^{(2)}(0)=-\frac{1}{4}$
$f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}(x+1)^{-5/2}=\frac{3}{8(x+1)^{5/2}}$	$f^{(3)}(0)=\frac{3}{8}$
$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}(x+1)^{-7/2}=\frac{-15}{16(x+1)^{7/2}}$	$f^{(4)}(0)=-\frac{15}{16}$

- 範例三

利用範例二的結果來估計 $\sqrt{0.9}$

解： $\because x = -0.1$

$$\therefore P_4(-0.1) = 1 + \frac{1}{2}(-0.1) - \frac{1}{8}(-0.1)^2 + \frac{1}{16}(-0.1)^3 - \frac{5}{128}(-0.1)^4$$

$$= 0.948683594$$

由於 $x = -0.1$ 靠近 0，所以其估計值很準確

$(\sqrt{0.9} = 0.948683594)$

- 範例二

請求出函數 $f(x)=\sqrt{x+1}$ 在 $x=0$ 的四次泰勒多項式

解：

Derivative	Value at 0
$f(x)=\sqrt{x+1}=(x+1)^{1/2}$	$f(0)=1$
$f^{(1)}(x)=\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}=\frac{1}{2(x+1)^{1/2}}$	$f^{(1)}(0)=\frac{1}{2}$
$f^{(2)}(x)=-\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}=\frac{-1}{4(x+1)^{3/2}}$	$f^{(2)}(0)=-\frac{1}{4}$
$f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}(x+1)^{-5/2}=\frac{3}{8(x+1)^{5/2}}$	$f^{(3)}(0)=\frac{3}{8}$
$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}(x+1)^{-7/2}=\frac{-15}{16(x+1)^{7/2}}$	$f^{(4)}(0)=-\frac{15}{16}$

- 範例三

利用範例二的結果來估計 $\sqrt{0.9}$

解： $\because x = -0.1$

$$\therefore P_4(-0.1) = 1 + \frac{1}{2}(-0.1) - \frac{1}{8}(-0.1)^2 + \frac{1}{16}(-0.1)^3 - \frac{5}{128}(-0.1)^4$$

$$= 0.948683594$$

由於 $x = -0.1$ 靠近 0，所以其估計值很準確

$(\sqrt{0.9} = 0.948683594)$

- 範例四

  請求出函數 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 在 $x=0$ 的 n 次泰勒多項式

解：

Derivative	Value at 0
$f(x)=\dfrac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}$	$f(0)=1$
$f^{(1)}(x)=-1(1-x)^{-2}(-1)=(1-x)^{-2}$	$f^{(1)}(0)=1=1!$
$f^{(2)}(x)=2(1-x)^{-3}$	$f^{(2)}(0)=2=2!$
$f^{(3)}(x)=3!\,(1-x)^{-4}$	$f^{(3)}(0)=3!$
$f^{(4)}(x)=4!\,(1-x)^{-5}$	$f^{(4)}(0)=4!$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-1-n}\ , \quad f^{(n)}(0) = n!$$

$$\therefore P_n(x) = 1 + \frac{1!}{1!}x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n!}{n!}x^n$$

$$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x^i (\because x^0 = 1)$$

- 範例三

利用範例二的結果來估計 $\sqrt{0.9}$

解： $\because x = -0.1$

$$\therefore P_4(-0.1) = 1 + \frac{1}{2}(-0.1) - \frac{1}{8}(-0.1)^2 + \frac{1}{16}(-0.1)^3 - \frac{5}{128}(-0.1)^4$$

$$= 0.948683594$$

由於 $x = -0.1$ 靠近 0，所以其估計值很準確

$(\sqrt{0.9} = 0.948683594)$

- 範例五

利用四次泰勒多項式來估計 $1/0.98$

解：由範例四，利用 $n = 4, x = 0.02$

$$\left(\because f(0.02) = \frac{1}{1-0.02} = \frac{1}{0.98} \right)$$

$$\Rightarrow P_4(0.02) = 1 + 0.02 + 0.02^2 + 0.02^3 + 0.02^4$$

$$= 1.020408163$$

由於 $x = 0.02$ 靠近 0 ，所以其估計值很準確

$(1/0.98 = 1.020408163)$

- 問題：

以上所討論皆為 $x = 0$ 的 n 次泰勒多項式，若 $x = a(a \neq 0)$？

答案：

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

- 泰勒級數(Taylor Series)

[馬克勞林級數(Maclaurin Series)]

若函數 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的所有導函數皆存在，則 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的泰勒級數定義爲

$$f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

- 問題：

以上所討論皆爲 $x = 0$ 的 n 次泰勒多項式，若 $x = a(a \neq 0)$？

答案：

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

- 泰勒級數(Taylor Series)

[馬克勞林級數(Maclaurin Series)]

若函數 $f(x)$ 在 $x=0$ 的所有導函數皆存在，則 $f(x)$ 在 $x=0$ 的泰勒級數定義爲

$$f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^{2}+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^{3}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+\cdots$$

- 範例六

請求出函數 $f(x) = e^x$ 的馬克勞林級數

解：$\because f^{(i)}(x) = e^x, \forall i = 0,1,2,\cdots$

$\therefore f^{(i)}(0) = e^0 = 1$

$\Rightarrow f(x) = e^x$ 的馬克勞林級數爲

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}x^i$$

- 範例七

請求出函數 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ 的馬克勞林級數

解： $\because f^{(i)}(x) = i!\,(1-x)^{-1-i}, \forall i = 0,1,2,\cdots$

$\therefore f^{(i)}(0) = i!$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ 的馬克勞林級數爲

$$1 + \frac{1!}{1!}x + \frac{2!}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n!}{n!}x^n + \cdots$$

$$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

- 範例八

請求出函數 $f(x)=\ln(1+x)$ 的馬克勞林級數

解：$\because$ $f^{(1)}(x)=\dfrac{1}{(1+x)}=(1+x)^{-1}$

$$f^{(2)}(x)=-(1+x)^{-2}=(-1)\cdot 1!\,(1+x)^{-2}$$

$$f^{(3)}(x)=2(1+x)^{-3}=(-1)^{2}\cdot 2!\,(1+x)^{-3}$$

$$f^{(4)}(x)=-6(1+x)^{-4}=(-1)^{3}\cdot 3!\,(1+x)^{-4}$$

$$\vdots$$

$$\therefore\ f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,(1+x)^{-n},\ \forall n=1,2,\cdots$$

$$\Rightarrow\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$

所以函數 $f(x) = \ln(1+x)$ 的馬克勞林級數爲

$$f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{(-1)\cdot 1!}{2!}x^2 + \frac{(-1)^2\cdot 2!}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{n!}x^n + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots$$

- 範例九

請求出函數 $f(x)=\sin x$ 的馬克勞林級數

解： $\because$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x & \therefore\ f(0) &= 0 \\
f^{(1)}(x) &= \cos x & f^{(1)}(0) &= 1 \\
f^{(2)}(x) &= -\sin x & f^{(2)}(0) &= 0 \\
f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}(0) &= -1 \\
f^{(4)}(x) &= \sin x & f^{(4)}(0) &= 0 \\
f^{(5)}(x) &= \cos x & f^{(5)}(0) &= 1 \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}
$$

函數 $f(x)=\sin x$ 的馬克勞林級數爲

$$f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

$$=0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5\cdots$$

$$=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots$$

- 泰勒級數的運算

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 的泰勒級數分別爲

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

則1. $f(x)+g(x)$ 在 $x=0$ 的泰勒級數爲

$$(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots$$

2.對任意實數 c，$c \cdot f(x)$ 在 $x = 0$的泰勒級數爲

$$c \cdot a_0 + c \cdot a_1 x + c \cdot a_2 x^2 + \cdots + c \cdot a_n x^n + \cdots$$

3.對任意正整數 k ，$x^k f(x)$ 在 $x = 0$ 的泰勒級數爲

$$a_0 x^k + a_1 x^k \cdot x + a_2 x^k \cdot x^2 + \cdots + a_n x^k \cdot x^n + \cdots$$

$$= a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + a_2 x^{k+2} + \cdots + a_n x^{k+n} + \cdots$$

- 泰勒級數的運算

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 的泰勒級數分別爲

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots+b_nx^n+\cdots$$

則1. $f(x)+g(x)$ 在 $x=0$ 的泰勒級數爲

$$(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots$$

2.對任意實數 c， $c \cdot f(x)$ 在 $x = 0$的泰勒級數爲

$$c \cdot a_0 + c \cdot a_1 x + c \cdot a_2 x^2 + \cdots + c \cdot a_n x^n + \cdots$$

3.對任意正整數 k ， $x^k f(x)$ 在 $x = 0$ 的泰勒級數爲

$$a_0 x^k + a_1 x^k \cdot x + a_2 x^k \cdot x^2 + \cdots + a_n x^k \cdot x^n + \cdots$$

$$= a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + a_2 x^{k+2} + \cdots + a_n x^{k+n} + \cdots$$

- 範例十

請求出下列函數在 $x = 0$ 的泰勒級數

$(a) f(x) = 5e^x$ $(b) f(x) = x^3 \ln(1 + x)$

解：(a) 由範例六， e^x 的馬克勞林級數爲

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

$\Rightarrow f(x) = 5e^x$ 在 $x = 0$ 的泰勒級數爲

$$5 + 5x + \frac{5}{2!}x^2 + \frac{5}{3!}x^3 + \cdots + \frac{5}{n!}x^n + \cdots$$

(b) 由範例八，$\ln(1+x)$ 的馬克勞林級數為

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots$$

$\Rightarrow f(x) = x^3\ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 的泰勒級數為

$$x^4 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3}x^6 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n+3} + \cdots$$

- 範例十一

請求出函數 $f(x) = e^x + x + \sin x$ 在 $x = 0$ 的泰勒級數

解： 由範例六，e^x 的馬克勞林級數爲

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

由範例九， $\sin x$ 的馬克勞林級數爲

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

$\Rightarrow f(x) = e^x + x + \sin x$ 在 $x = 0$ 的泰勒級數爲

$$(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots) + x + (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots)$$

$$= 1 + 3x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

- 泰勒級數的合成

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 的泰勒級數為

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

對任意實數 c，正整數 k，以及 $g(x)=c\cdot x^k$

，函數 $f[g(x)]$在 $x=0$ 的泰勒級數為

$$a_0+a_1g(x)+a_2[g(x)]^2+a_3[g(x)]^3+\cdots+a_n[g(x)]^n+\cdots$$

- 範例十二

請求出下列函數在 $x = 0$ 的泰勒級數

$(a) f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$　　　$(b) f(x) = \dfrac{1}{1+4x}$

$(c) f(x) = \dfrac{1}{2-x^2}$

解：(a) 由範例六，

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

所以由泰勒級數的合成性質，

$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 在 $x=0$ 的泰勒級數爲

$$1+(-\frac{x^2}{2})+\frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2+\frac{1}{3!}(-\frac{x^2}{2})^3+\cdots+\frac{1}{n!}(-\frac{x^2}{2})^n+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!2^2}x^4-\frac{1}{3!2^3}x^6+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!2^n}x^n+\cdots$$

- 泰勒級數的合成

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 的泰勒級數為

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

對任意實數 c，正整數 k，以及 $g(x)=c\cdot x^k$

，函數 $f[g(x)]$ 在 $x=0$ 的泰勒級數為

$$a_0+a_1g(x)+a_2[g(x)]^2+a_3[g(x)]^3+\cdots+a_n[g(x)]^n+\cdots$$

- 範例十二

請求出下列函數在 $x = 0$ 的泰勒級數

$(a) f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(b) f(x) = \dfrac{1}{1+4x}$

$(c) f(x) = \dfrac{1}{2-x^2}$

解：(a) 由範例六，

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

所以由泰勒級數的合成性質，

$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 在 $x = 0$ 的泰勒級數爲

$$1+(-\frac{x^2}{2})+\frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2+\frac{1}{3!}(-\frac{x^2}{2})^3+\cdots+\frac{1}{n!}(-\frac{x^2}{2})^n+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!2^2}x^4-\frac{1}{3!2^3}x^6+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!2^n}x^n+\cdots$$

$(b) \because \dfrac{1}{1+4x} = \dfrac{1}{1-(-4x)}$ 且由範例七

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$\therefore f(x) = \dfrac{1}{1+4x}$ 在 $x = 0$ 的泰勒級數爲

$$1 + (-4x) + (-4x)^2 + (-4x)^3 + \cdots + (-4x)^n + \cdots$$

$$= 1 - 4x + 4^2x^2 - 4^3x^3 + \cdots + (-1)^n 4^n x^n + \cdots$$

(c) $\because \dfrac{1}{2-x^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-x^2/2}$ 且由範例七，

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2-x^2}$ 在 $x=0$ 的泰勒級數為

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{x^2}{2})+\frac{1}{2}\cdot(\frac{x^2}{2})^2+\frac{1}{2}\cdot(\frac{x^2}{2})^3+\cdots+\frac{1}{2}\cdot(\frac{x^2}{2})^n+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^3}x^4+\frac{1}{2^4}x^6+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}x^{2n}+\cdots$$

所以由泰勒級數的合成性質，

$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 在 $x = 0$ 的泰勒級數爲

$$1+(-\frac{x^2}{2})+\frac{1}{2!}(-\frac{x^2}{2})^2+\frac{1}{3!}(-\frac{x^2}{2})^3+\cdots+\frac{1}{n!}(-\frac{x^2}{2})^n+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!2^2}x^4-\frac{1}{3!2^3}x^6+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!2^n}x^n+\cdots$$

- 範例十三

若 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，試求由 $x=0$，$x=1$，x 軸以及 $f(x)$ 所圍成的面積

解：

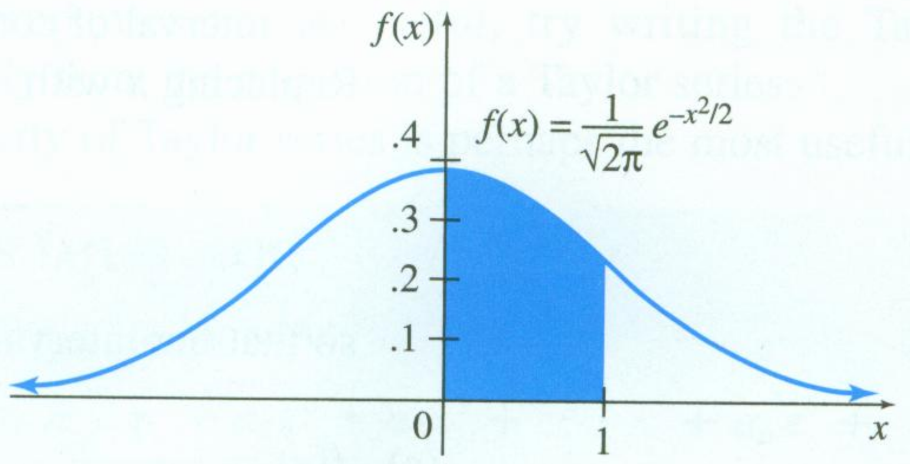

FIGURE 7

所求為 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

由範例十二(a)，

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!2^2}x^4 - \frac{1}{3!2^3}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!2^n}x^n + \cdots$$

所以 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!2^2}x^4 - \frac{1}{3!2^3}x^6 + \frac{1}{4!2^4}x^8 - \frac{1}{5!2^5}x^{10}\right)dx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} + \frac{1}{3456} - \frac{1}{42240} - 0\right)$$

≈ 0.3413 (與查表值一樣)

- 範例十三

若 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，試求由 $x=0$，$x=1$，x 軸以及 $f(x)$ 所圍成的面積

解：

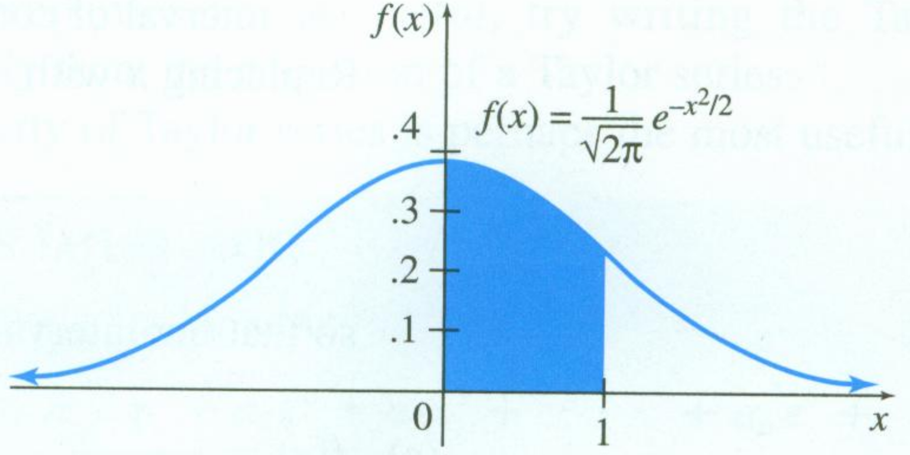

FIGURE 7

所求爲 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

由範例十二(a)，

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!2^2}x^4 - \frac{1}{3!2^3}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!2^n}x^n + \cdots$$

所以 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!2^2}x^4 - \frac{1}{3!2^3}x^6 + \frac{1}{4!2^4}x^8 - \frac{1}{5!2^5}x^{10}\right)dx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{336} + \frac{1}{3456} - \frac{1}{42240} - 0\right)$$

≈ 0.3413 (與查表值一樣)

- 泰勒級數

若函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 的所有導函數皆存在，則 $f(x)$ 在 $x = a$ 的泰勒級數定義爲

$$f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

- 範例十四

請求出函數 $f(x) = e^x$在 $x = 1$的泰勒級數

解： $\because f^{(i)}(x) = e^x, \forall i = 0,1,2,\cdots$

$\therefore f^{(i)}(1) = e$

$\Rightarrow f(x) = e^x$ 在$x = 1$ 的泰勒級數爲

$$1 + \frac{e}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \cdots + \frac{e}{n!}(x-1)^n + \cdots$$

- 範例十五

請求出函數 $f(x)=\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 的泰勒級數

解：$\because$

$$f(x)=\sin x$$
$$f^{(1)}(x)=\cos x$$
$$f^{(2)}(x)=-\sin x$$
$$f^{(3)}(x)=-\cos x$$
$$f^{(4)}(x)=\sin x$$
$$f^{(5)}(x)=\cos x$$
$$\vdots$$

$\therefore$

$$f(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$$
$$f^{(1)}(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$f^{(2)}(\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$$
$$f^{(3)}(\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$f^{(4)}(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$$
$$f^{(5)}(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\vdots$$

$\Rightarrow$ 函數 $f(x) = \sin x$ 在 $x = \dfrac{\pi}{6}$ 的泰勒級數爲

$$f(\frac{\pi}{6}) + \frac{f^{(1)}(\frac{\pi}{6})}{1!}(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{f^{(2)}(\frac{\pi}{6})}{2!}(x - \frac{\pi}{6})^2 + \frac{f^{(3)}(\frac{\pi}{6})}{3!}(x - \frac{\pi}{6})^3 + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{6})^2 - \frac{1}{3!} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6})^3 + \cdots$$

- 範例十五

請求出函數 $f(x) = \sin x$ 在 $x = \dfrac{\pi}{6}$ 的泰勒級數

解：$\because$

$$f(x) = \sin x \qquad \therefore \; f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x \qquad f^{(1)}(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x \qquad f^{(2)}(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \qquad f^{(3)}(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad f^{(4)}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x \qquad f^{(5)}(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$\Rightarrow$ 函數 $f(x) = \sin x$ 在 $x = \dfrac{\pi}{6}$ 的泰勒級數爲

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{f^{(1)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{f^{(2)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{f^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \cdots$$

- 泰勒級數

若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的所有導函數皆存在，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 的泰勒級數定義爲

$$f(a)+\frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$