Pan Pearl River Delta Physics Olympiad 2005
Jan. 29th, 2005
Morning Session Marking Scheme

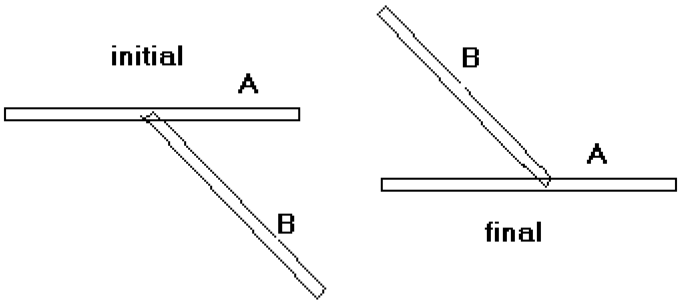
Q1. Original Position of A (center) A 的起始中心位置: (*0,0*)---- (1 分)

Original Position of B (center) A 的起始中心位置: (*L/2cos θ,-L/2sin θ*) --- (1 分)

Center-of-mass of A+B remains fixed A+B 的重心不变 ---- (1 分)

Final Position of A (center) A 的最终中心位置: (*L/2cos θ,-L/2sin θ*) ---- (1 分)

Final Position of B (center) B 的最终中心位置: (*0,0*) ------(1 分)



Q2.

a. According to the Boyle's Law 利用理想气体原理,

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

$$P_h = \rho_w gh + P_0 = [(1000\times 9.8\times 2\times 10^3)+10^5]Nm^{-2}$$ ---- (1 分)

$$= 1.97\times 10^7\, Nm^{-2}$$ ---- (1 分)

$$V_0 = \frac{P_hV_h}{P_0} = \frac{1.97\times 10^7}{10^5}(10^{-3})m^3 = 0.197m^3$$ ---- (1 分)

共 (3 分)

b. Buoyant Force 浮力,

$F = \Delta\rho gV \qquad \Delta\rho = \rho_w - \rho \qquad (\rho_w >> \rho, \Delta\rho \approx \rho_w)$

For the tank 钢瓶,

$$\rho = \frac{\rho_0V_0}{V_h} = \frac{(1.21)(0.197)}{10^{-3}}kgm^{-3} = 238.4kgm^{-3}$$ ---- (1 分)

$$E_t = \Delta\rho gV_hh = (1000-243.21)(9.8)(10^{-3})(2\times 10^3)J = 1.48\times 10^4 J$$ --- (1 分)

For the bubble 气泡,

Energy gained = buoyant force part 浮力作功

$$\rho \propto P \Rightarrow \rho_b \frac{P_b}{P_0}\rho_0 = \frac{\rho_0}{P_0}(\rho_w gh + P_0) \text{---- (1 分)}$$

$$E_b = \int F dh$$

$$= \int_0^h (\rho_w - \frac{\rho_0}{P_0}(\rho_w gh + P_0)g(\frac{P_0 V_0}{\rho_w gh + P_0})dh$$

$$= \int_0^h (\frac{\rho_w g P_0 V_0}{\rho_w gh + P_0} - \rho_0 g V)dh$$

$$= P_0 V_0 \ln[\frac{P_0 + \rho_w gh}{P_0}] - \rho_0 g V_0 h$$

$$= [(1.97\times 10^4)\ln[197] - (1.21)(9.8)(0.197)(2\times 10^3)]J$$

$$= (1.041\times 10^5 - 4247.3)J$$

$$= 0.998\times 10^5 J \quad \text{---- (1 分)}$$

(if assume 如果假设 $\Delta\rho \approx \rho_w$, we have the following modification 我们得到)

$$E_b = \int F dh$$

$$= \int_0^h \rho_w g(\frac{P_0 V_0}{\rho_w gh + P_0})dh$$

$$= P_0 V_0 \ln[\frac{P_0 + \rho_w gh}{P_0}]$$

$$= (1.97\times 10^4)\ln[197]J$$

$$= 1.041\times 10^5 J$$

共 (7 分)

c. For the tank 钢瓶,

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_t$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_t}{\rho_0 V_0}} = \sqrt{\frac{2(1.48\times 10^4)}{(1.21)(0.197)}} ms^{-1} = 352.4 ms^{-1} \quad \text{---- (1 分)}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_b$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_b}{\rho_0 V_0}} = \sqrt{\frac{2(0.998\times 10^5)}{(1.21)(0.197)}} ms^{-1} = 915.2 ms^{-1}$$

or $v=\sqrt{\frac{2(1.041\times10^5)}{(1.21)(0.197)}}=934.5ms^{-1}$ ---- (2 分)

共（3 分）

Q3.

a.

$$I=\sum_i m_i r_i^2 =(0.5\mathrm{M}+10(0.01\mathrm{M})r^2+\frac{1}{2}\mathrm{M}R^2 \quad \text{let 取} \quad \frac{R}{r}=n>1$$
$$=(0.6+0.5n^2)\mathrm{M}r^2$$
$$L=I\omega=(0.6+0.5n^2)\mathrm{M}\omega r^2 \quad (4 \text{ 分})$$

b. $L=m\omega r^2$ where $M=(0.6+0.5n^2)\mathrm{M}$ and $m=0.01\mathrm{M}$

In the 1st throw, by the conservation of angular momentum, 扔了一石子后，由角动量守恒

$$L=(M-m)\omega_1 r^2+mr^2(\frac{v}{r}\sin\theta+\omega_1) \quad \text{---- (2 分)}$$

$$\Rightarrow \omega_1=\frac{L-mvr\sin\theta}{Mr^2}$$

For the optimum angle to slow down,

$\Rightarrow \sin\theta=1\Rightarrow\theta=90^0C$

---- (1 分)

$$\Rightarrow \omega_1=\frac{L-mvr}{Mr^2}=\frac{L}{Mr^2}-\frac{mv}{r}(\frac{1}{M}) \quad \text{---- (1 分)}$$

共（4 分）

c. For the 2nd stone 扔第二颗石子后,

$$\omega_2=\frac{L_1-mvr}{Mr^2} \quad \text{---- (1 分)}$$

where 其中 $L_1=(M-m)\omega_1 r^2$ and $M_1=M-m$

$$=\frac{L}{Mr^2}-\frac{mv}{r}(\frac{1}{M}+\frac{1}{M-m}) \quad \text{---- (1 分)}$$

For the nth stone 扔第 n 颗石子后,

$$\omega_n = \frac{L}{Mr^2} - \frac{mv}{r}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{M-(i-1)m}$$

$$\omega_{10} = \frac{L}{Mr^2} - \frac{mv}{r}\sum_{i=1}^{10}\frac{1}{M-(i-1)m} \quad \text{---- (2 分)}$$

共（4 分）

Q4. (a) 长竿绕圆心运动。球面对长竿的力通过圆心，力矩为 0。---（1 分）
According to the Parallel Axis Theorem 根据平行轴定理,

$$I = I_0 + M(R^2 - \frac{1}{4}L^2) = \frac{1}{12}ML^2 + Mh^2 \quad \text{---（2 分）}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}} \qquad \text{where 其中} \qquad h = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}L^2}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gh}{h^2 + \frac{1}{12}L^2}} \quad \text{---（1 分）}$$

共（4 分）

（b）长竿最大偏角时两端的力分别为 At maximum angle the forces on the ends are $N \pm \delta N$, respectively

$2N\sin\beta = Mg\cos\theta_{\max} = Mg(1-\frac{1}{2}\theta_{\max}^2)$， ---（1）

其中 where $\sin\beta \equiv \frac{\sqrt{R^2 - 1/4L^2}}{R}$ 。

$Mh\omega^2\theta_{\max} = Mg\theta_{\max} - 2\delta N\cos\beta$ ---（2）

$\delta NL\sin\beta = I_0\omega^2\theta_{\max}$ ---（3）

Putting(3) into(2) one gets the same frequency as in (a) 由(3)得 δN 。将 (3) 代入 (2) 可得频率，与(a)相同。

长竿水平时两端的力均为 At level position both end forces are N'，angular speed is 角速度为 $\omega^2 = Mgh\theta_{\max}^2 / I$ 。

$2N'\sin\beta = Mg + Mh\omega^2$ --- (4)

Finally 最后得 $\alpha = (\frac{6}{12+(L/h)^2} + \frac{1}{4}) / \sin\beta$ 。

Q5.

a. $\vec{E} = E_0 \hat{x} e^{i(kz-\omega t)}$ where 其中 $k = \frac{\omega}{c}\tilde{n}$

Let 令 $k = \frac{\omega}{c}(a+ib)$ where 其中 $\tilde{n} = a+ib$

a and b are real, a 和 b 为实数

$\vec{E} = E_0 \hat{x} e^{i\omega(\frac{az}{c}+i\frac{bz}{c}-t)} = E_0 e^{-\frac{b\omega z}{c}} \hat{x} e^{i\omega(\frac{az}{c}-t)}$ ---（1 分）

if 如果 $k = \frac{\omega}{c}a$,

$\vec{E} = E_0 \hat{x} e^{i\omega(\frac{az}{c}-t)}$ 波幅不随传播而变 ---（1 分）

if 如果 $k = \frac{\omega}{c}(a+ib)$,

波幅随传播而变 ---（1 分）

if 如果 $k = i\frac{\omega b}{c}$,

$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{b\omega z}{c}} x e^{-i\omega t}$ 波幅随传播而变 ---（1 分）

共（4 分）

b. $\vec{B} = \frac{1}{i\omega}\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{i\omega}(ikE_0 \hat{y} e^{i(kz-\omega t)})$

$= \frac{k}{\omega} E_0 \hat{y} e^{i(kz-\omega t)}$ ---（1 分）

$= \frac{1}{c}(a+ib)E_0 e^{-\frac{b\omega z}{c}} \hat{y} e^{i\omega(\frac{az}{c}-t)}$ ---（1 分）

For complex k, 如 k 是复数.

$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{Re}(\vec{E}\times\vec{B}^*) = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}[\frac{1}{c}(a-ib)E_0^2 e^{-\frac{2b\omega z}{c}}]$

$= \frac{a}{2\mu_0 c} E_0^2 e^{-\frac{2b\omega z}{c}}$ ---（3 分）

共（5 分）

c. $q=\frac{d\langle\vec{S}\rangle}{dz}=\frac{a}{2\mu_0 c}(-\frac{2b\omega}{c})E_0^2 e^{-\frac{b\omega z}{c}}$

$=-\frac{ab\omega}{\mu_0 c^2}E_0^2 e^{-\frac{2b\omega z}{c}}$ ---（2 分）

if a or b = 0 当 a 或 $b=0$时 $q=0$

d. 不. 当 a = 0 但 $b\neq 0$时，波幅随传播而变，但$q=0$。

No. When a = 0 but $b\neq 0$, the wave amplitude changes but $q=0$.（2 分）

第一届泛珠三角物理奥林匹克竞赛

第二部分答案

Q6

（a） （3 分）答案一：把线圈看成无数个小的正方形的线圈叠加的总效果。小线圈的合力是零，因此总的合力是零。

答案二：将线圈在磁场里移动并不需要做功，因无电磁感应，因此总的合力是零。

答案三：用矢量投影。

（b） 将线圈在磁场边界分成两半，假想一正负电流。--- （1 分）

α＝1 --- （2 分）

共（3 分）

（c） 线圈在磁场中运动时，切割磁场的长度

$$w = 2\sqrt{r^2 - y^2} \quad \text{---}\ （1 分）$$

产生的电流

$$I = \frac{Bwv}{R} \quad \text{---}\ （1 分）$$

其中 $v = \frac{dy}{dt}$ --- （1 分）

磁场对线圈的作用力

$$F = BIw \quad \text{---}\ （1 分）$$

运动方程为 $m\frac{d^2y}{dt^2} = F - mg$ --- （1 分）

综合上面各式，化简为:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{4B^2}{mR}(r^2 - y^2)\frac{dy}{dt} + g = 0 \quad \text{---}\ （1 分）$$

共（6 分）

Q7

(a)

$j = nev = \sigma E$, --- （1 分）　　$E = \frac{V}{W}$ --- （1 分）

$F_E = \frac{eV_H}{W}$, --- （1 分）　　$F_B = eBv$ --- （1 分）

由 $F_E = F_B$ ，--- （1 分）

可以求出 $\frac{V_H}{V} = \frac{B\sigma}{en}$ --- （1 分）

共（6 分）

（b）平均来讲电子有一半的自旋向上，一半的自旋向下。沿 X−方向运动的电子收 y 方

向的力，$j = j_y + j_{-y} = 0$，但 $j_{spin} \neq 0$。 j_{spin}实际上是自旋电流，而不是电荷电流。

$$j_y = \sigma E_y = \frac{\sigma F_Y}{e} = \frac{\sigma \eta_R m v_x}{e} = \frac{\sigma \eta_R m}{e} \cdot \frac{\sigma V}{neW} = \frac{\sigma^2 \eta_R m V}{nWe^2}$$

电流方向一左一右，由自旋是上还是下决定。共（6 分）

（c）

达到平衡时，退激化的电子等于电流补充进来的电子

$$\frac{n_m}{\tau} = \frac{j_y}{e} \quad \text{---（2 分）}$$

$$M = n_m m = \frac{\sigma^2 \eta_R m^2 \tau V}{Wne^3} \quad \text{---（1 分）}$$

共（3 分）

Q8

(a)部分

A1:

Surface charge density 电荷面密度$\sigma = P\cos\theta$ ---（1 分）

$$E_p = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \times 2 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos\theta \cdot R^2 \sin\theta \cdot \cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{P}{3\varepsilon_0} \quad \text{---（2 分）}$$

共（3 分）

A2:

$$E = E_0 - \frac{p}{3\varepsilon_0} = E_0 - \frac{\varepsilon - 1}{3}E \text{，} \quad \text{---（2 分）} \quad \text{可得}\vec{E} = \frac{3}{\varepsilon + 2}\overrightarrow{E_0} \quad \text{---（1 分）}$$

共（3 分）

A3:

$$\vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \vec{E} \text{---（1 分）}$$

$$= 3\varepsilon_0 \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2}\overrightarrow{E_0} \text{---（1 分）}$$

$$\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\overrightarrow{E_0}$$

$$\alpha = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \text{---（1 分）}$$

共（3 分）

(b) 部分

B1:

左右 $W=\frac{2Q^2}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{2R}-\frac{1}{\sqrt{4R^2+d^2}}]=\frac{p^2}{32\pi\varepsilon_0 R^3}$ ----（2 分）

上下 $W=-\frac{p^2}{16\pi\varepsilon_0 R^3}$ ----（2 分）

共（4 分）

B2：(电像法 image charge) ----（1 分）

$$W=\frac{p^2}{16\pi\varepsilon_0 R^3}, \text{----（1 分）} \quad F=\frac{\partial W}{\partial(2R)}=\frac{3p^2}{32\pi\varepsilon_0 R^4} \text{ ----（1 分）}$$

共（3 分）

B3：

$$W=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{2}{\sqrt{4R^2+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{(2R-d)^2+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{(2R+d)^2+x^2}})=-\frac{3p^2}{128\pi\varepsilon_0 R^5}x^2$$

----（1 分）

$$F=-\frac{dW}{dx}=\frac{3p^2}{64\pi\varepsilon_0 R^5}\delta a \text{ ----（2 分）}$$

共（3 分）

（c）部分：左右排列时，能量为正，与距离三次方成反比，不易粘在一起。----（1 分）

细柱的体积：$\frac{4}{3}\pi R^3\times\frac{D}{2R}$ ，总体小球的体积：ADm

细柱的根数：$\frac{ADm}{\frac{4}{3}\pi R^3\times\frac{D}{2R}}$ ----（1 分）

$$\delta a=\frac{2R}{D}\delta x,\ \delta f=F \text{ ----（1 分）}$$

$$\eta=\frac{D\delta f}{A\delta x}=\frac{9m\varepsilon_0}{4}(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2})^2(\frac{V}{D})^2=\frac{9m\varepsilon_0}{4}(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2})^2E_0^2 \text{ ----（1 分）}$$

共（4 分）