Physics Enhancement Programme –
Student Self-learning Booklet (try-out version)
物理培訓課程 － 學生自學冊 (試用版)

MECHANICS IN PHYSICS OLYMPIAD
物理奧林匹克力學

Chief Editor : Professor Yang Zhi Yu
主　編　：楊志宇教授

Hong Kong Physics Olympiad Committee
香港物理奧林匹克委員會
2007

簡介

《物理培訓課程 - 學生自學冊》的內容包括「香港物理奧林匹克」所涉及的力學課題。此冊有別於一般的教科書，是專爲有志探究高中課程大綱以外物理論題的學生而編寫的。此冊內容大部份不涉及微積分，但爲了幫助學生理解某些特定物理主題，有小部份涉及基本的微積分。每個物理主題由基礎理論開始，繼而提升探究層次，最後達致超越高中課程的程度。主要的物理概念會明確地表達，而較次要的物理概念和推導方法將簡潔地提及，並讓學生自學，從自學的探究過程中研習物理。讀者須參考額外資料，以進一步理解某些主題如向量、基礎的微積分等等，該些資料大部份可見於中六至中七的教科書。

謹此鳴謝爲此冊的編刊作出貢獻的人士。主要擬稿者(香港物理奧林匹克委員會委員) (排名按筆劃序):

- 狄惠賢老師 (羅定邦中學)
- 吳肇祖博士 (福建中學)
- 翁烈鴻老師 (聖言中學)

參與中/英文字翻譯工作:

- 李德華老師 (嘉諾撒聖瑪利書院)
- 馮志霖老師 (青年會書院)

楊志宇
香港物理奧林匹克委員會主席
香港科技大學物理學系

第一章 矢量和機械運動

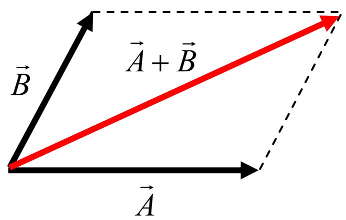
運動學就是運動的描述。本章我們將學習描述運動粒子的位置、速度和加速度。我們並將介紹矢量符號的應用，以及導數作爲變化率。我們已假設讀者有一定關於矢量（亦稱向量）和微積分的數學基礎。

1.1 矢量和標量

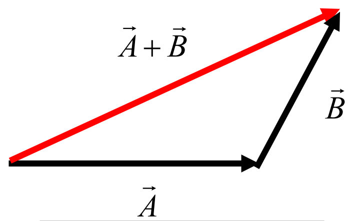
- 矢量包含量值和方向。
  例如：力，加速度，速度，動量，衝量 ……
- 標量只包含量質。
  例如：能量、溫度、電荷、質量、速率 ……

1.2 矢量的加法和減法

- 矢量的加法可用平行四邊形法或致尾法。

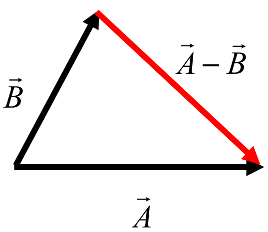


平行四邊形法

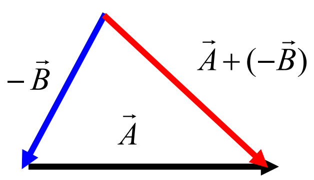


致尾法

- $\vec{A}-\vec{B}$ 的結果也是一矢量，以 $\vec{A}-\vec{B}$ 所得的矢量加上 $\vec{B}$ 後將得回 $\vec{A}$ (見左圖)。又或我們可以重寫 $\vec{A}-\vec{B}$ 爲 $\vec{A}+(-\vec{B})$ 。矢量 $\vec{B}$ 的負值就只是倒轉其方向，量值卻仍保持不變 (見右圖).



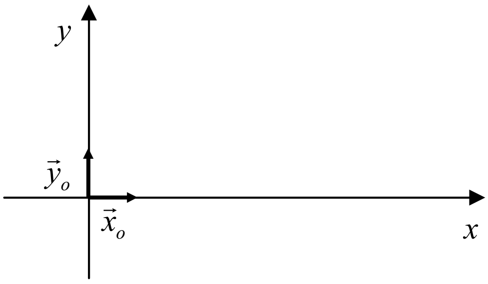
$(\vec{A}-\vec{B})$ 所得的矢量加上 $\vec{B}$ 後將得回 $\vec{A}$



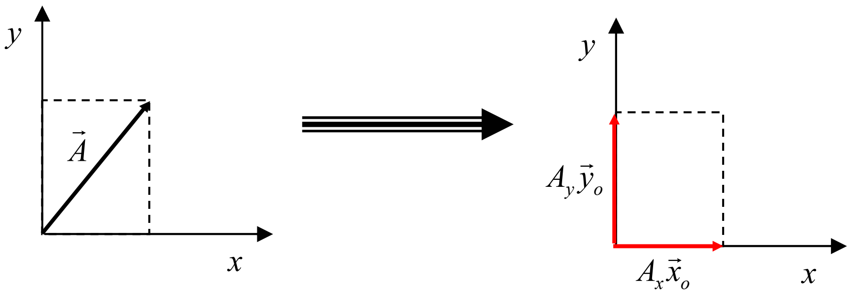
$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$

1.3 矢量的分解

- 一個矢量能分解成多於一個的分量。很多時，將矢量分解成分量將能簡化計算。
- 學習開始時，我們只考慮二維空間下的矢量，學生可自行將結果引伸至三維空間。
- 定義沿 x-軸正值方向上的單位矢量爲 $\vec{x}_o$，沿 y-軸正值方向上的單位矢量爲 $\vec{y}_o$。單位*矢量*就是量值爲 1 的*矢量*。數學上，我們以 $|\vec{A}|$ 表示爲 $\vec{A}$ 矢量的量值 (或有時簡化爲 A)。如此，我們得矢量 $|\vec{x}_o| = |\vec{y}_o| = 1$。



- 下圖所示，矢量 $\vec{A}$ 全等於 2 個紅色矢量 $A_x\vec{x}_o$ 及 $A_y\vec{y}_o$ 之和 (矢量的加法) 。換句話說，矢量 $\vec{A}$ 能分解成 2 個紅色的分量。



- 數學上，我們得

$$\vec{A} = A_x\vec{x}_o + A_y\vec{y}_o \qquad (1.1)$$

其中 $A_x = A\cos\theta,$ θ 爲 $\vec{A}$ 與正 x-軸所形成的夾角。

$A_y = A\sin\theta,$

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2} \qquad (1.2)$$

- 以分量形式表達，加法和減法可「按其分量分別處理」。

若 $\vec{A} = A_x\vec{x}_o + A_y\vec{y}_o$ 和 $\vec{B} = B_x\vec{x}_o + B_y\vec{y}_o$

則 $\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x)\vec{x}_o + (A_y \pm B_y)\vec{y}_o \qquad (1.3)$

所以，兩個矢量的相加可簡單地按其分量分別相加。

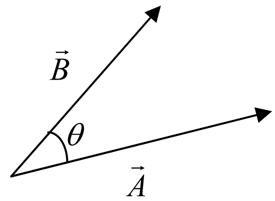
1.4 點積和叉積

1.4.1 點積

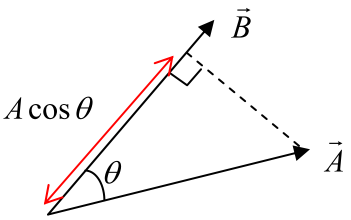
- 兩個矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的點積 (或純量積)

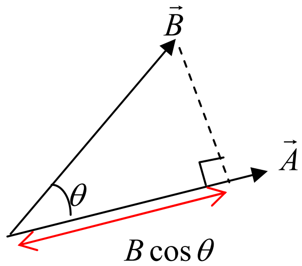
  $\vec{A}\bullet\vec{B}\equiv\left|\vec{A}\right|\times\left|\vec{B}\right|\times\cos\theta$ (1.4),

  其中 θ 爲 2 個矢量的夾角。



- 點積實際上是 $\vec{A}$ 在 $\vec{B}$ 方向上的投影乘以 $\vec{B}$ 的量值。
  當然，這也是 $\vec{B}$ 在 $\vec{A}$ 方向上的投影乘以 $\vec{A}$ 的量值。.





$\vec{A}\bullet\vec{B}=(A\cos\theta)\times B$

$A\cos\theta=\vec{A}$ 在 $\vec{B}$ 方向上的投影

$\vec{A}\bullet\vec{B}=(B\cos\theta)\times A$

$B\cos\theta=\vec{B}$ 在 $\vec{A}$ 方向上的投影

- 其中一個點積的例子就是以力 $\vec{F}$ 作用一距離 $\vec{s}$ 所做的功 W。定義爲，

  $W\equiv\vec{F}\bullet\vec{s}=Fs\cos\theta$ (1.5)

- 點積的特性

  (1) $\vec{A}\bullet\vec{B}=\vec{B}\bullet\vec{A}$ (1.6a)

  (2) $(k\vec{A})\bullet\vec{B}=k(\vec{A}\bullet\vec{B})$, 其中 k 爲一標量 (1.6b)

  (3) $\vec{A}\bullet(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\bullet\vec{B}+\vec{A}\bullet\vec{C}$ (1.6c)

  (4) 若 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 爲非平行的

  $m\vec{A}+n\vec{B}=0$ 蘊含 $m=n=0$ (1.6d)

  (5) 對非零的矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$,

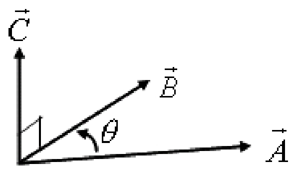
  $\vec{A}\bullet\vec{B}=0$ 等同於 $\vec{A}$ 垂直於 $\vec{B}$ (1.6e)

  (6) 若 $\vec{A}=A_x\vec{x}_o+A_y\vec{y}_o$ 和 $\vec{B}=B_x\vec{x}_o+B_y\vec{y}_o$

  且 $\vec{A}\bullet\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y$, (1.6f)

  因爲 $\vec{x}_o\bullet\vec{x}_o=\vec{y}_o\bullet\vec{y}_o=1$ 和 $\vec{x}_o\bullet\vec{y}_o=\vec{y}_o\bullet\vec{x}_o=0$ (1.6g)

1.4.2 叉積



兩個矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的叉積得矢量 $\vec{C}$，
$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$。 $\vec{C}$ 垂直於 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 形成的平面，幷以右手定律决定方向。其量値爲 $C=A\cdot B\cdot\sin\theta$ (1.7).

(證明 $\vec{B}\times\vec{B}=0=\vec{A}\times\vec{A}$)

注意乘法的次序此時顯得相當重要。使用右手定律可證明。

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}. \qquad (1.8)$$

(右手定律：用你的右手，豎直母指、食指及中指使三者互相垂直。使食指指向 $\vec{x}_o$ 方向，中指指向 $\vec{y}_o$ 方向，母指指向 $\vec{z}_o$ 方向。在此定義下，$\vec{x}_o\times\vec{y}_o=\vec{z}_o$。)

叉積同時滿足組合定律：

$$(\vec{A}_1+\vec{A}_2)\times\vec{B}=\vec{A}_1\times\vec{B}+\vec{A}_2\times\vec{B};\ \ \vec{B}\times(\vec{A}_1+\vec{A}_2)=\vec{B}\times\vec{A}_1+\vec{B}\times\vec{A}_2 \qquad (1.9)$$

$(k\vec{A})\times\vec{B}=k(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\times(k\vec{B})$, 其 k 爲一標量。 (1.10)

對於沿 x-y-z 軸上的單位向量，我們有

$$\vec{x}_0\times\vec{y}_0=\vec{z}_0,\ \ \vec{y}_0\times\vec{z}_0=\vec{x}_0,\ \ \vec{z}_0\times\vec{x}_0=\vec{y}_0. \qquad (1.11)$$

使用以上結果，你可以得出兩個矢量的分量幷以分量形式表達。這是

$\vec{A}=A_x\vec{x}_0+A_y\vec{y}_0+A_z\vec{z}_0$, $\vec{B}=B_x\vec{x}_0+B_y\vec{y}_0+B_z\vec{z}_0$ ，且

$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\vec{x}_0+A_y\vec{y}_0+A_z\vec{z}_0)\times(B_x\vec{x}_0+B_y\vec{y}_0+B_z\vec{z}_0)$=…..相當長

若你懂得如何計算行列式，你能證明

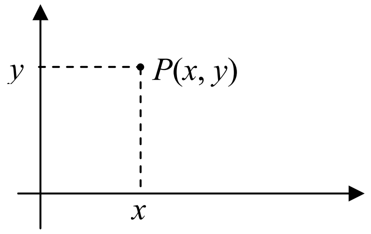
$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}. \qquad (1.12)$$

這是一個非常容易的記憶方法。

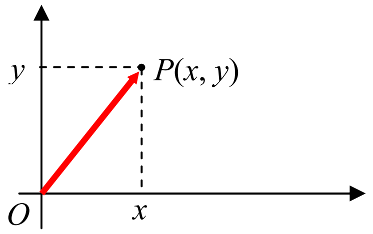
叉積和點積能同時使用，如 $(\vec{A}\times\vec{B})\bullet\vec{C}$ 等。

1.5 位置矢量

- 在 x-y 平面上，我們用點 $P(x, y)$ 代表一粒子的位置。

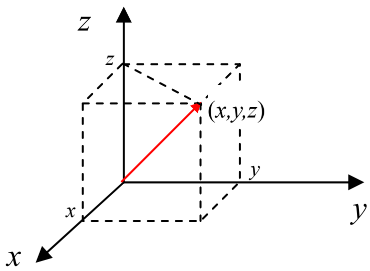


- 粒子的位置矢量 $\vec{r}$ 就是由原點 O 直指位置 P 的矢量。



$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{x}_o + y\vec{y}_o \qquad (1.13)$$

- 發展至三維空間時，我們引入 z-軸。z-軸垂直於 x-軸 和 y-軸，并跟從右手定律決定方向。



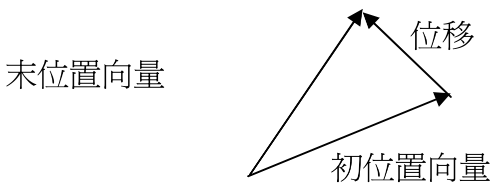
$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{x}_o + y\vec{y}_o + z\vec{z}_o \qquad (1.14)$$

你可任意選擇原點 O 的位置。但通常，選取的位置不應明顯地使問題變得複雜。$\vec{x}_o$，$\vec{y}_o$ 和 $\vec{z}_o$ 的方向也是任意選取的，只須確保三者互相垂直及滿足右手定律。

1.6 位移, 速度和加速度

- 位置向量的改變稱爲位移 $\Delta\vec{r}$.

$$\Delta\vec{r} = \text{ 末位置向量 } - \text{ 初位置向量}$$



- 用分量形式，位移矢量可表示爲

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\vec{x}_o + \Delta y\,\vec{y}_o + \Delta z\,\vec{z}_o$$

其 $\Delta x, \Delta y$ 及 Δz 分別爲 x, y 和 z-座標的改變。

- 在一段時間間隔 Δt 內，粒子的平均速度矢量可表示爲

$$\vec{v}_{ave} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{x}_o + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{y}_o + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{z}_o \qquad (1.15)$$

- 取 Δt 趨於零的極限時可求得瞬時速度矢量。換句話說，瞬時速度矢量爲位置矢量相對於時間的導數。

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{x}_0 + \frac{dy}{dt}\vec{y}_0 + \frac{dz}{dt}\vec{z}_0 = v_x\vec{x}_0 + v_y\vec{y}_0 + v_z\vec{z}_0 \qquad (1.16)$$

- (瞬時) 加速度就是速度的變化速率，可表達爲

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{x}_0 + \frac{dv_y}{dt}\vec{y}_0 + \frac{dv_z}{dt}\vec{z}_0 = a_x\vec{x}_0 + a_y\vec{y}_0 + a_z\vec{z}_0 \qquad (1.17)$$

注意加速度同時爲位置矢量的二階導數。

$$\vec{a} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{x}_0 + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{y}_0 + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{z}_0 \qquad (1.18)$$

1.7 導數

- 在此章節，u, v 都是 x 的函數，而 k 爲常數。
- 以下的微分法只列明，但無證明。
  - 加減法則 $\dfrac{d}{dx}(u \pm v) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$ (1.19a)
  - 積法則 $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$ (1.19b)
  - 商法則 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$ (1.19c)
  - 全連式法則 $\dfrac{d}{dx}f(y) = \dfrac{df(y)}{dy} \times \dfrac{dy}{dx}$, (1.19d),

    其中 $f(y)$ 表示爲 y 的函數。

- 下列給出數個基本函數的導數，但無證明。
  - $\frac{d}{dx}k = 0$, 其中 k 爲常數 (1.20a)
  - $\frac{d}{dx}ku = k\frac{du}{dx}$ (跟據積法則並 $\frac{dk}{dx} = 0$) (1.20b)
  - $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$, 其 n 爲常數 (1.20c)
  - $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ (1.20d)
  - $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ (1.20e)

- 其他在此册子提出的有關函數的導數也可根據上述法則而作計算。下列一些例子。

例子：求 $\frac{d}{dt}(3t + \frac{1}{2}kt^2)$ ，其 k 爲常數

解
$$\frac{d}{dt}(3t + \frac{1}{2}kt^2) = \frac{d}{dt}(3t) + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}kt^2) \quad \text{(加法則)}$$
$$= 3\frac{dt}{dt} + \frac{1}{2}k\frac{d}{dt}t^2 \quad \text{(常數可置於導數之前)}$$
$$= 3(1) + \frac{1}{2}k(2t^{2-1})$$
$$= 3 + kt$$

例子： 粒子作一維運動時的位移表示爲

$s = 3t + \frac{1}{2}kt^2$ ，求其速度及加速度並以 k 及 t 表示。

解：從上題例，

$v = \frac{ds}{dt} = 3 + kt$, v 相對於時間 t 作線性增加。

加速度爲 v 的導數 (或 x 的二階導數)

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3 + kt) = k$, a 爲常數並等於 k。

例子：求 $\frac{d}{dt}r\sin(\omega t)$ ，其 r 及 ω 爲常數。

解：
$$\frac{d}{dt}r\sin(\omega t) = r\frac{d}{dt}\sin(\omega t) \quad \text{(常數可置於導數之前)}$$
$$= r\frac{d}{d(\omega t)}\sin(\omega t) \times \frac{d(\omega t)}{dt} \quad \text{(鏈式法則)}$$
$$= r\omega\cos(\omega t)$$

1.8 勻加速度的運動方程 (拋體運動)

- 重溫中學會考 (CE) 所學的運動方程

  $v = u + at$ (1.21a)

  $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ (1.21b)

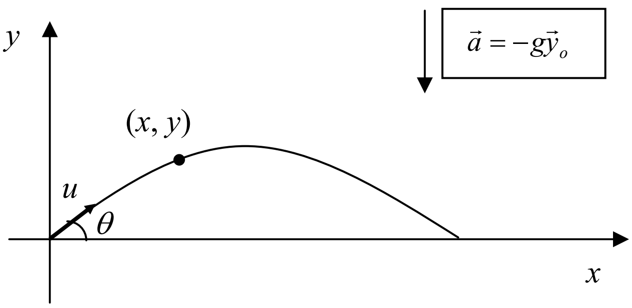
  $v^2 - u^2 = 2as$ (1.21c)

  此三條方程適用於勻加速的直線運動

- 在現實生活中，物體在三維空間中運動。但是，若物體的加速度爲常數，則必存在一平面包含初速度矢量及加速度矢量 (在幾何學上以二條直綫定義一平面)。以此平面處理運動簡化爲二維問題，因爲物體再沒有垂直于此平面的速度和加速度。換句話說，運動已被限于在一平面內。

- 在選取適當的平面後，將所有的矢量分解爲兩個垂直的分量，一個分量平行于加速度，另一個分量爲垂直于加速度，對于處理問題是相當方便的。

- 考慮物體于引力場下作運動，這樣的運動被稱爲拋體運動。以初位置爲原點 (故 $x_0 = y_0 = 0$) 及其初速爲 u 並其與水平($\vec{x}_o$ 方向) 方向之夾角爲 θ 。



- 沿垂直和水平方向的運動可分別地處理。
- 水平運動

  $a_x = 0$,

  $v_x =$ *常數* (即初值) $= u_x = u\cos\theta$. (1.22a)

  $x - x_0 = u_x t$ (1.22b)
- 垂直運動

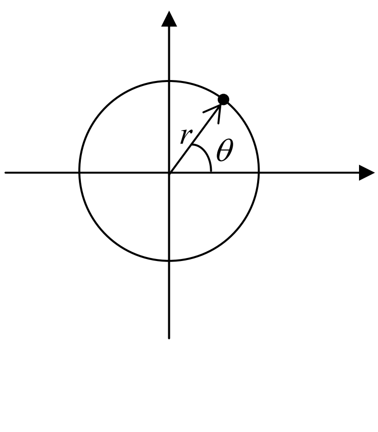
  $a_y = -g$ (1.22c)

  $v_y = u_y + a_y t = u\sin\theta - gt$ (1.22d)

  $y - y_0 = u_y t + \frac{1}{2}a_y t^2 = u\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$ (1.22e)

  (x_0, y_0) 爲 $t = 0$ 時粒子的初位置，於此情況下兩者皆爲零。注意不要混淆初位置 (x_0, y_0) 和單位矢量 $\vec{x}_o$ 及 $\vec{y}_o$!
- 消去 t 後，得 y 爲 x 的函數，此函數爲拋物線。這題目留給讀者作練習。

1.9 圓周運動



- 處理圓周運動時，以極座標 (r, θ) 描述粒子運動是相當方便的。只要取圓形軌道的圓心爲原點，位置矢量 r 的量值將爲常數。

- 粒子的位置只須一個參數已可表明，θ 被稱爲粒

子的角位移。θ 的單位爲弧度。(英文簡稱 rad)

- 瞬時角速度ω 被定義爲角位移的改變率。ω 的單位爲 rad s^{-1}。

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (1.23a)$$

- 角加速度 α 被定義爲角速度的改變率。單位爲 rad s^{-2}。 α 同時爲 θ 的二階導數。

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (1.23b)$$

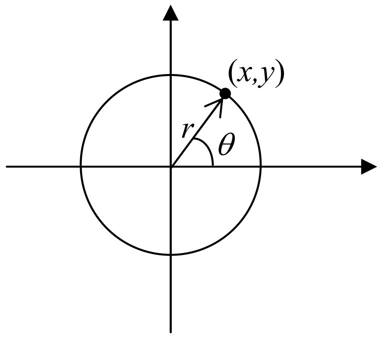
1.9.1 勻圓周運動

- 勻圓周運動時， ω 爲常數 (或 $\alpha = 0$)。這情況下， θ 將隨時間線性增加。

$$\theta = \omega t + \phi \qquad (1.24)$$

其中ϕ爲粒子初始角位移。當然在選取適當的軸之後可使位移爲零。爲簡化起見，本節餘下部份都以 $\phi = 0$ 。

- 當角速度爲常數時，粒子的線速率 v 亦爲常數。值得注意的是，粒子的綫速度幷非恒常不變，因爲其方向在不斷改變。



- 若粒子的角位移爲θ，x 和 y 的座標可以下列方程表述。

$$x = r\cos\theta = r\cos(\omega t) \qquad (1.25a)$$

$$y = r\sin\theta = r\sin(\omega t) \qquad (1.25b)$$

- 求粒子速度 $\vec{v}$ 的 x-分量和 y-分量可取上述方程式的導數。

$$v_x = \frac{dx}{dt} = r(-\sin(\omega t)) \times \omega = -r\omega\sin(\omega t) \qquad (1.26a)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = r\cos(\omega t) \times \omega = r\omega\cos(\omega t) \qquad (1.26b)$$

$\vec{v}$ 的量值 (即速率) 表明爲

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = r\omega, \qquad (1.27)$$

正如預期一樣，此項爲常數。

- 只須簡單計算，就能得$\vec{r} \bullet \vec{v} = 0$。這是說明位置矢量永遠與速度矢量垂直。

- 求加速度 $\vec{a}$ 可取 $\vec{v}$ 相對於 t 的導數。

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -r\omega^2\cos(\omega t) \qquad (1.28a)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -r\omega^2 \sin(\omega t) \qquad (1.28b)$$

- 因爲 $a_x = -r_x\omega^2$ and $a_y = -r_y\omega^2$

  所以 $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$ (1.28c)

  加速度矢量與位置矢量方向倒轉。即是說，加速矢量永遠指向圓形軌迹的圓心，因此亦被稱爲向心加速度。

1.9.2 非勻圓周運動 (選讀部分。可略過。)

- 若 ω 不是常數 $(\alpha \neq 0)$，加速度將分成兩部份。
- 角位移對應於 t 不再爲線性增加。我們重新由原本的方程式開始。

  $x = r\cos\theta$

  $y = r\sin\theta$

$$v_x = r(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt} = -r\omega\sin\theta$$

$$v_y = r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = r\omega\cos\theta$$

$$a_x = -r\frac{d\omega}{dt}\sin\theta - r\omega\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = -r\alpha\sin\theta - r\omega^2\cos\theta$$

$$a_y = r\frac{d\omega}{dt}\cos\theta + r\omega(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt} = r\alpha\cos\theta - r\omega^2\sin\theta$$

組合以上結果，得出

$\vec{a} = r\alpha\hat{e}_\theta - r\omega^2\hat{e}_r = a_T\hat{e}_\theta + a_C\hat{e}_r$

其 $\hat{e}_r$ 爲沿徑方向上的單位矢量，$\hat{e}_\theta$ 爲切向上的單位矢量，方向取 θ 增加方向爲正值。

- 以上方程等號右面第二項爲個心加速度，等同于勻圓周運動引入的值

  $a_C = -r\omega^2$
- 第一項被稱爲切向*加速度*，方向爲圓形軌迹的切綫。

  $a_T = r\alpha$
- 事實上 a_T 就是線速率 v 的變化率。

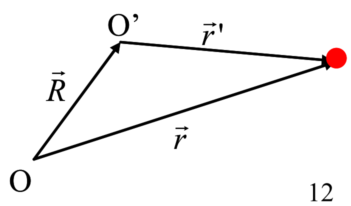
  $$a_T = \frac{dv}{dt}$$

  若 v 爲常數，運動變回勻圓周運動。

1.10 相對運動

在描述任何運動時，參考座標系是必須的。

考慮兩個參考座標系 S 和 S’，而其原點分別於 O 及 O’， S 座標系中的 X–，Y-及 Z-軸分別於平行於 S’座標系中 X’-Y’-Z’軸。其



中一個座標系與另一座標系作相對運動，相對速度及加速度分別
爲$\vec{u}$和$\vec{A}$。

留意到： $\vec{r}=\vec{r}'+\vec{R}$.

故此，速度是： $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dfrac{d\vec{r}'}{dt}+\dfrac{d\vec{R}}{dt}=\vec{v}'+\vec{u}$ (1.29)

同樣地，加速度爲： $\vec{a}\equiv\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d\vec{v}'}{dt}+\dfrac{d\vec{u}}{dt}=\vec{a}'+\vec{A}$ (1.30)

這是經典的相對性理論。若$\vec{u}$爲常數，則$\vec{A}=0$ 及 $\vec{a}=\vec{a}'$，故此牛頓定律將適用于所有的慣性座標系。

適當地選取參考座標系，可將問題大大的簡化。

1.11 問題討論：

(第四，八， 十一題問題提供了簡單答案，你可選取其爲相關主題的例子作演示。)

1. +/− 符號在矢量中有何重要的物理意義？ +/− 符號是否會改變矢量的量值？
2. 標量能否取負值？若是，當比較矢量時，標量中的 +/− 符號有何物理意義？試舉例說明。
3. 引伸二維矢量答案至三維。設$\vec{x}_o$，$\vec{y}_o$ 及 $\vec{z}_o$ 爲 x, y 及 z-軸正値方向上的單位矢量。

   設 $\vec{A}=A_x\vec{x}_o+A_y\vec{y}_o+A_z\vec{z}_o$ 和 $\vec{B}=B_x\vec{x}_o+B_y\vec{y}_o+B_z\vec{z}_o$.

   a. 寫出 $\vec{A}\pm\vec{B}$ 。
   b. 寫出$\vec{A}\bullet\vec{B}$ 。
   c. 寫出$|\vec{A}|$ and $|\vec{A}+\vec{B}|$。
   d. 演示 $\vec{A}\bullet\vec{A}=|\vec{A}|^2$ 。
   e. 試找出以下那一項爲標量。
      $(\vec{A}\times\vec{B})\bullet\vec{C}$；$\vec{A}\times(\vec{B}\bullet\vec{C})$； $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$； $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ 。
      上述最後兩項的值是否相同？然後決定 $\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}$ 是否有意義。

4. 一直升機要降落在以17m/s向南(單位向量$\vec{y}_0$)飄流的船上。此時刮的是風速爲12m/s 的東風(單位向量$\vec{x}_0$)。船員見到直升機以 5 m/s 的速度垂直降落下來。取向下方向爲單位向量$\vec{z}_0$。求直升機相對于水和空氣的速度。

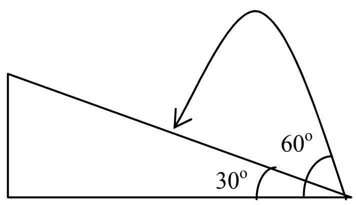
   (a) $(5\vec{y}_0-17\vec{z}_0)$ m/s; $(-12\vec{x}_0+17\vec{y}_0+5\vec{z}_0)$ m/s
   (b) $(-12\vec{x}_0+17\vec{y}_0+5\vec{z}_0)$ m/s; $(17\vec{y}_0+5\vec{z}_0)$ m/s
   (c) $(5\vec{z}_0)$ m/s; $(-12\vec{x}_0+17\vec{y}_0+5\vec{z}_0)$ m/s
   (d) $(17\vec{y}_0+5\vec{z}_0)$ m/s; $(-12\vec{x}_0+5\vec{z}_0)$ m/s
   (e) $17\vec{y}_0$ m/s; $(-12\vec{x}_0+5\vec{z}_0)$ m/s

5. 初位置矢量 P 爲 $\vec{r}_0 = 3\vec{x}_o - 4\vec{y}_o + 2\vec{z}_o$ 物體開始時爲靜止並以固定加速度 $\vec{a} = 2\vec{x}_o - 3\vec{y}_o - \vec{z}_o$ 作加速。求其位置矢量 $\vec{r}$ 及速度矢量相對於時間的函數。
(答案： $\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$)

6. 粒子沿直線作運動，其位置可用函數 $x = A\sin(\omega t)$ 表明，其中 A 及 ω 爲常數 (你可稱 A 爲振幅及 ω 爲角頻率) 。求相對於時間的速度及加速度。 草繪 x-t, v-t 及 a-t. 圖。試說明 a 及 x 的關係。

7. 飛機離地面 h 高作恆速度 v_o 的水平飛行。當飛機正于一大炮垂直上空時，大炮發射炮彈攻擊飛機。
   a. 若炮彈能擊中飛機，求其最小之初速度。
   b. 設炮彈以最小初速度發射
      i. 炮彈應以什麼角度發射？
      ii. 求飛機被炮彈擊中的位置及時間。

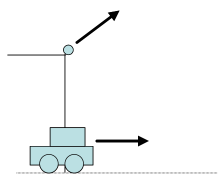
8. 物體以速度 20 m s^{-1} 及與水平夾角 60^o 的方向，在一傾斜 30^o 的斜板底部作投射。求物件擊中斜板的位置。



9. 將一粒子放在一圓形枱面上，枱面以其中心軸以角速度ω 作旋轉。粒子離中心 10 cm 。若ω 由零開始漸漸增加，而枱面與粒子的摩擦系數爲 0.5。求粒子開始在枱面上作滑動時 ω 值。(此題可等學了第三章後再做。)

10. 粒子沿一半徑爲 r 垂直圓軌道，並在引力作用下作運動。其在軌道底部時速度爲 v。求 v 的最小值使其可以完成整個圓周運動。討論若粒子的速度小於 v 時其運動如何。

11. 一球初離地面 H 高，當一車子以 v_2 速度經過其下麵時，球以初速度 v 發出并最終擊中車子。求球的拋擲角度 θ ，及其擊中車子的位置。(與第 7 題相似)



引伸討論
(1) v_2 能否大於 v ？
(2) θ 是否可爲負值？比較若θ 爲面值時的答案。
(3) 以車子作爲參考座標系，解相同問題。

1.12 問題的建議答案：

4.

相對於水、船的速度爲$\vec{v}_1 = 17\vec{y}_0$ m/s；空氣的速度爲 $\vec{v}_2 = 12\vec{x}_0$ m/s，全部皆相對于地球。直升機于船座標系的相對速度爲$\vec{v}_3 = 5\vec{z}_0$ m/s。即船與水一起運動，直升機相對于水的相相對于地球爲$\vec{v}_3 = 5\vec{z}_0$ m/s。其速度相對于地球爲 $\vec{v}_4 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$，相對於空氣則爲$\vec{v}_5 = \vec{v}_4 - \vec{v}_2$。故正確答案爲 c。

8.

設 $\beta = 30^\circ, \alpha = 60^\circ$
方法一
取 x-軸指向水平右面，y-軸指向上

$$x = vt\cos\alpha\,, \qquad (1)$$

$$y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2. \qquad (2)$$

擊中斜板時 $y = x\tan\beta$. (3)

我們現有三個未知數 x, y, t 及三條方程式。把 Eq (3) 中的 x, y 用 Eqs. (1) 及 (2)消去幷解出 t，再將 t 放回方程式得 x 及 y，最後代入數字。

方法二
取 x-軸平行斜板及 y-軸垂直斜板，在此情況下$\vec{g} = -g\sin\beta\vec{x}_0 - g\cos\beta\vec{y}_0$，故此時 x-方向及 y-方向上都是勻加速運動。

$$x = vt\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}gt^2\sin\beta\,, \qquad (1)$$

$$y = vt\sin(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}gt^2\cos\beta \qquad (2).$$

擊中斜板時 $y = 0$。放回方程式得 $t = \dfrac{2v\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$.

將答案放回 Eq. (1) 求 x 。
驗證此時的 x 等於方法一中的$\sqrt{x^2+y^2}$ 。

11.

球的初位置爲 $(0, H)$。之後球的位置： $y_1 = H + vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2,\ x_1 = vt\cos\theta$

車的初位置爲 (0, 0)。之後車的位置： $y_2 = 0,\ x_2 = v_2 t$
球擊中車時 $y_1 = y_2$, 及 $x_1 = x_2$。由此得$v_2 = v\cos\theta$，幷確定角度θ 的值。
將 θ 放回$0 = H + vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ 得 t，將 t 代到其中一條方程式得 x_1 或 x_2 的水平距離。

第二章 力及物體的平衡

2.1 力

<u>基本概念和理論</u>

1. 力的概念

- 力是物體對物體的作用，力不能脫離物體而獨立存在；
- 力的作用效果是使物體發生形變或使物體的運動狀態發生變化；
- 力是向量，大小、方向、作用點是力的三要素；
- 力的單位是牛頓(N)。

2. 力的分類

(1) 按力的性質分：可分爲萬有引力、彈力、摩擦力、分子力、電磁力、核力等；
(2) 按力的效果分：可分爲壓力、支持力、阻力、向心力、回復力等；
(3) 按作用方式分：場力 (如萬有引力、電磁力…) 和接觸力(如彈力、摩擦力…)。
(4) 上述力中除了萬有引力、核力外，其餘都是電磁力造成的。

3. 力學中常見的幾種力

(1) 重力

(a) 定義：地球上的一切物體都受到地球的吸引，這種由于地球的吸引而使物體受到的力叫做重力。
(b) 大小：$G = mg$ ，其 m 是物件的質量和 g 是萬有引力加速度。
(c) 方向：豎直向下。
(d) 重心：一個物體各部分都要受重力的作用，效果上看可以認爲各部分受到的重力集中于一點，這一點叫做物體的重心。

(2) 彈力

(a) 定義：直接接觸的物體間由於發生形變的物體要恢復原狀，對跟它接觸的物體會產生力的作用，這種力叫彈力。
(b) 方向的確定：壓力、支持力的方向總是垂直于接觸面，指向被壓或被支持的物體；繩的拉力方向總是沿著繩子拉伸的方向；
(c) 大小的確定：彈簧在彈性限度內遵從胡克定律 $F = kx$；其他情形的彈力一般根據物體的運動狀態，利用牛頓定律或平衡條件來計算。

(3) 摩擦力

(a) 定義：相互接觸的物體間發生相對運動或有相對運動趨勢時，在接觸面處產生的阻礙物體相對運動的力。
(b) 靜摩擦力：物體間有相對運動趨勢但無實際相對運動。靜摩擦力的方向總與物體間的相對運動趨勢的方向相反，其最大值爲 $F = \mu_s F_N$，其中 μ_s 爲靜摩擦因數，F_N 爲壓力。靜摩擦力隨外力或運動狀態的改變而改變，一般不用公式直接計算而是根據物體的運動狀態由平衡條件或牛頓定律來計算它的大小，
(c) 滑動摩擦力：物體間有相對運動，大小可由 $F = \mu_k F_N$ 計算，其中 F 爲摩擦力；μ_k 爲動摩擦因數；F_N 爲壓力。滑動摩擦力的方向總跟接觸面相切，并且跟物體的相對運動方向相反。

(4) 萬有引力

自然界中任何兩個物體都是相互吸引的，引力的大小跟這兩個物體質量的乘積成正比。

公式：$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$，　　　　(2.1)

其中引力常量 $G = 6.67\times10^{-11}$ N m^{12}/kg^2。

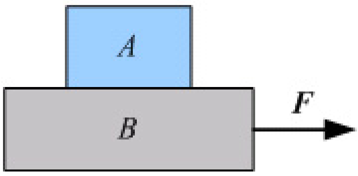
注意事項

1. 重力是由于地面上的物體受到地球的萬有引力而產生的，地面上的物體受到的引力可分解爲重力和物體隨地球自轉所需的向心力，引力和向心力都與地球緯度有關，所以質量一定的物體所受的重力也隨地球的緯度變化。

2. 彈力產生的條件是接觸且有形變，若物體間雖然接觸但它們之間並無擠壓形變，則它們之間也不存在彈力，但由於常見的物體之間的作用形變很小；很難用眼觀察到，因而判斷彈力是否存在，需要根據物體所處的狀態，利用平衡條件及牛頓運動定律來分析。

3. 靜摩擦力屬于被動力，它的大小與方向由外力或運動狀態決定。

4. 摩擦力阻礙的是相對運動或相對運動趨勢，並不是阻礙物體運動的，它可能成爲物體運動的動力的。如圖所示 A、B 兩個物體叠在水平面上，用力 F 拉 B 物體，使 A、B 一起向右運動，則 A 物體受到的摩擦力就是動力，方向向右。



5. 萬有引力定律中兩個物體的距離，對於相距很遠而可以看作質點的物體，就是指兩個質點間的距離；對于均勻的球體，指的是兩個球心的距離。

例題驗證

例一

下列關於力的說法，正確的是

A. 兩個物體一接觸就會產生彈力

B. 物體的重心不一定在物體上

C. 滑動摩擦力的方向總是和物體的運動方向相反

D. 懸挂在天花板上的輕質彈簧在挂上重 2N 的物體後伸長 2cm 靜止，那麽這根彈簧伸長 10cm 後靜止時，它的兩端各受到 10N 的拉力

解析

A. 兩個物體接觸發生形變才會產生彈力，A 錯。

B. 物體的重心可以不在物體上，例如，半圓形鐵環重心可用懸線法確定，它並不在半環上，故正確。

C. 初速度爲 v_0 的小物塊，滑上水平放置在光滑水平面的木板上時，物塊與木板間的滑動摩擦力可使木板移動，對木板來說，木板的運動方向與它受的滑動摩擦力方向相同，C 錯。

D. 在彈性限度內彈簧彈力與彈簧伸長量成正比，故 D 正確。

2.2 力的合成與分解

基本概念和理論

1. 力的合成：求幾個已知力的合力叫做力的合成。

(1) 同一直綫上的幾個共點力的合成：先確定正方向，與正方向相同的分力取正値。與正方向相反的力取負值，合力等于各分力的代數和，合力範圍爲 $|F_1 - F_2| \le F \le |F_1 + F_2|$。

(2) 互成角度力的合成：

(i) 平行四邊形法

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta}$$

$$\phi = \arctan\frac{F_1\sin\theta}{F_2 + F_1\cos\theta}$$

(ii) 三角形法

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta}$$

$$\frac{\sin\phi}{F_2} = \frac{\sin\theta}{F}$$

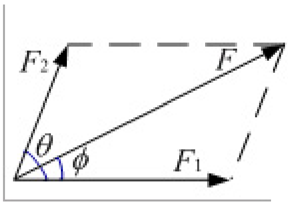
(iii) 正交分解法

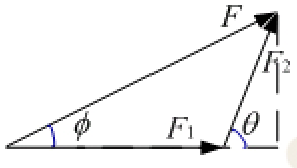
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2},$$

$$\phi = \arctan\frac{F_y}{F_x}$$

$$F_x = \sum F_{ix}\cos\theta_i,$$

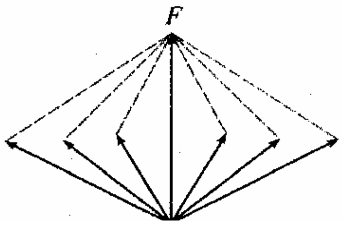
$$F_y = \sum F_{iy}\cos\theta_i$$

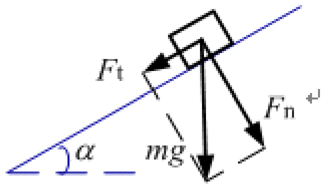




2. 力的分解

求一個已知力的分力叫力的分解，一個已知力可分解爲無數個分力，如圖所示。





在實際應用中常根據這個力産生的效果來分解，例如放在斜面上物體所受的重力産生了一個沿斜面 F 滑和一個壓斜面的效果，因此可分解爲沿斜面和垂直斜面兩個分力

$F_1 = mg\sin\alpha$，$F_2 = mg\cos\alpha$。

讀者可參考第一章中關于矢量（向量）運算的內容。

例題驗證

例二

將一個力分解爲兩個力，合力與分力的關係是

A. 合力大小一定等于兩個分力大小之和

B. 合力大小一定大于兩個分力大小

C. 合力大小一定小于每個分力的大小

D. 合力大小一定大于一個分力的大小，而小於另一個分力大小

E. 合力可能比兩個分力都大，也可能都小，還可能比一個分力大，比另一個分力小

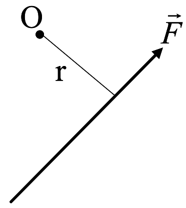
解析

兩個力的合力應滿足 $F_1 - F_2 \le F_{合} \le F_1 + F_2$，所以合力可以比兩分力都大，也可能比兩個分力都小，答案 E 正確。

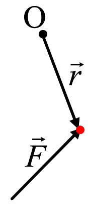
2.3 力偶矩

當兩個大小相等、方向相反的力作用在一根均勻杆的兩端時，杆的中心點依然靜止但將會繞其中心發生轉動。「力偶矩」是用來描述它對所作用的物體產生轉動效果的物理量。首先應該選擇一個原點 O（又稱為轉動軸）。力 $\vec{F}$ 對原點 O 的力矩的大小是

$$M = rF \qquad (2.2),$$



其中 r 是原點 O 到力 $\vec{F}$ 的作用線的垂直距離。使用右手定則，力偶矩(向量)的方向爲指向并垂直于紙面的方向。我們可以選擇任何點作爲原點，即是該點不在力作用的物體上，所以力矩依賴於原點的選擇。可是，對于兩個大小相等、方向相反的力，則力矩之和(即力偶矩)與原點的選擇無關。讀者可自己加以驗證。



力偶矩的一般形式定義爲

$$\vec{M} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \qquad (2.3),$$

它涉及向量的叉積。應該指出，使用第一章中「叉積定則」，公式(2.3)所給定的力偶矩的值與公式(2.2)是相同的。

2.4 物體的平衡

<u>基本概念和理論</u>

1. 平衡狀態

一個物體如果保持靜止或者作勻速直綫運動，我們就說這個物體處於平衡狀態。

2. 物體的平衡條件

(1) 合力爲零，即 $\sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots \vec{F}_n = 0 \qquad (2.4a)$

(2) 合力矩爲零，即 $\sum \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots \vec{M}_n = 0 \qquad (2.4b)$

3. 應用平衡條件解題的步驟

(1) 應用共點力平衡條件的解題步驟

a. 選好研究物件，並對研究物件正確地做受力分析。
b. 選好處理力的方法 (即力的合成法與力的分解法) 對物體所受的力進行處理。
c. 根據平衡條件建立平衡方程。
d. 聯立方程求解。

(2) 應用有轉動軸物體平衡條件的解題步驟:

a. 先確定轉動軸的位置。
b. 確定轉動物體的受力作用點與作用力的方向。

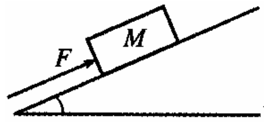
c. 確定各力的力臂。

d. 根據各力矩的效果建立平衡方程，幷求解。

例題驗證

例三

如圖所示，位于斜面上的物塊 M 在沿斜面向上的力 F 作用下，處於靜止狀態，則斜面作用于物塊的靜摩擦力，下列哪項是正確 ？



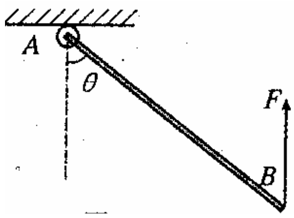
A. 方向可能沿斜面向上　　　B. 方向可能沿斜面向下

C. 大小可能等於零　　　　　D. 大小可能等於 F

解析

靜摩擦力的方向由相對運動趨勢決定，相對運動趨勢由重力沿斜面的分力 G_x 與 F 的大小決定:當 $G_x > F$ 時，物塊 M 有向下運動趨勢，摩擦力向上;當 $G_x < F$ 時，物塊 M 有向上運動趨勢，摩擦力向下;當 $G_x = F$ 時，摩擦力爲零。所以 A、 B 、C 、D 都是正確的。

例四



如圖所示，受有一定重力的均勻杆可繞 A 端的軸在豎直平面內轉動，現用豎直向上的拉力 F 將杆慢慢拉起，下列哪項是正確 ？

A.拉力不變，拉力矩變大　　　B.拉力不變，拉力矩減小

C.拉力增大，拉力矩減小　　　D.拉力減小，拉力矩減小

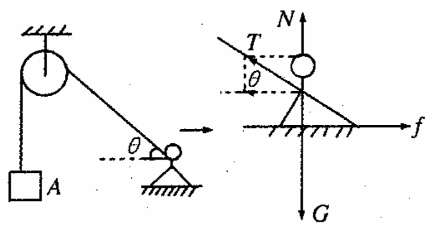
解析

用豎立向上的拉力將杆慢慢拉起，說明杆一直處于平衡狀態，F 的力矩總等于杆的重力矩，當 θ 角變大的過程中，杆的重力臂增大，所以重力矩增大，F的力矩也增大，由於重力臂與 F 的力臂爲 1∶2 關係不變，所以 F也不變，由此可知答案 A 是正確的。

2.5 綜合例題

例題一

如圖所示，在人向右運動的過程中，物體 A 緩慢上升，若人對地面的壓力爲 N，人受到的摩擦力爲 f，人拉繩的力爲 T，則人在運動中，下列哪項是正確 ？



A. N、f、T都增大　　B. N和 f增大，T不變

C. N、f、T都減小　　D. N增大，f減小，T不變

解析

拉繩子的力 $T = mg$ (設 m 爲物體質量)是不變的；地面對人的支持力在數值上等于人對地面的壓力 N；人雖然向右緩緩運動，但他受的摩擦力爲靜摩擦力。

對人的受力分析，如右圖所示，人受四個力，繩對人的拉力、重力、地面對人的支援力、靜摩擦力。

把 T 作正交分解爲豎直向上的力 $T\sin\theta$ 和水平向左的力 $T\cos\theta$，可列方程 $N + T\sin\theta = G$，所以 $N = G - T\sin\theta$，當人向右運動時角 θ 變小，所以 N 變大。

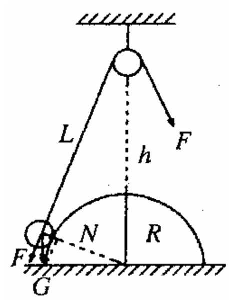
又因爲 $f = T\cos\theta$，$\cos\theta$ 值變大，所以 f 變大。

答案 B

例題二

如圖所示，在半徑爲 R 的光滑半球面上 h 處懸掛一個定滑輪。重力爲 G 的小球用繞過滑輪的繩子被站在地面上的人拉住，人緩慢拉動繩子。在小球運動到接近頂點的過程中，小球對半球面的壓力和繩子拉力如何變化? (滑輪和小球半徑可忽略不計)

解析

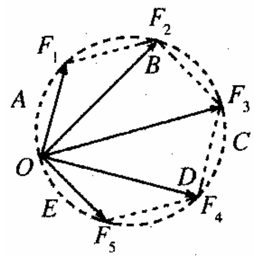


以小球爲研究物件，受重力、拉力和支援力。將重力 G 沿繩子和垂直于球面方向分解爲 F、N，從圖中可以看出由 G 、F、N 組成的力的三角形和由 L、R、$(R+h)$ 構成的幾何三角形相似。

利用相似三角形知識 $\dfrac{N}{G} = \dfrac{R}{R+h}; \dfrac{F}{G} = \dfrac{L}{R+h}$ ，由於在拉動過程中，R、h 不變，L 在減小，所以對球面壓 $N = \dfrac{RG}{R+h}$ 大小不變，繩的拉力 $F = \dfrac{LG}{R+h}$ 在減小。

本題應用數學工具，尤其是應用相似三角形的知識，可使解題過程簡潔明晰。把物理問題轉化爲數學問題，是物理學中常用的研究方法。

例題三



如圖所示，有五個力 F_1，F_2，F_3，F_4，F_5 作用於一點 O，構成一個正六邊形的兩鄰邊和三條對角線。設 F_3 =10N，試求這五個力的合力。

解析

本題考查平行四邊形定則的應用，但有一定的思維技巧，充分利用正六邊形的幾何特點。

連接 AC、DC，四邊形 $OACD$ 是平行四邊形，兩條鄰邊爲 F_1 和 F_4，其對角線是 F_3。根據平行四邊形求合力的法則知 F_1 和 F_4 的合力爲 F_3。同理，由平行四邊形 $OBCE$ 知 F_2 和 F_5 的合力也是 F_3，所以 F_1，F_2，F_3，F_4，F_5 的合力 $F = 3F_3 = 30$N。

答案 30N

例題四

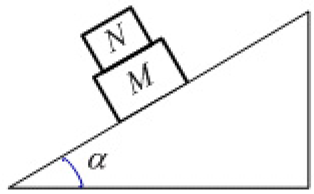
如圖所示，物體 N 放在物體 M 上，M、N 的上下表面均與斜面平行。當兩者以相同的初速度靠慣性沿光滑固定斜面向上做勻減速運動時，下列哪項是正確 ?

A. M 受到 N 的摩擦力沿斜面方向向上

B. M 受到 N 的摩擦力沿斜面方向向下

C. M、N 之間的摩擦力爲零

D. M、N 之間是否存在摩擦力取決於 A、B 表面的性質

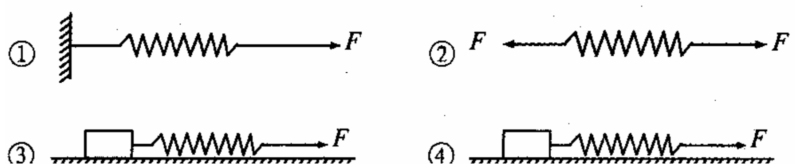


解答

因斜面光滑，且 M、N 表面平行，故 M、N 有相同的加速度 $a = gsin\alpha$。且初速度亦相同，故 M、N 無相對運動趨勢，答案 C 正確。

例題五

如圖所示，四個完全相同的彈簧都處於水平位置，它們的右端受到大小皆爲 F的拉力作用，而左端的情況各不相同；(1)中彈簧的左端固定在墻上，(2)中彈簧的左端受大小也爲 F的拉力作用，(3)中彈簧的左端拴一小物塊，物塊在光滑的桌面上滑動，(4)中彈簧的左端拴一小物塊，物塊在有摩擦的桌面上滑動。若認爲彈簧的質量都爲零，以 l_1、l_2、l_3、l_4 依次表示四個彈簧的伸長量，下列哪項是正確 ？



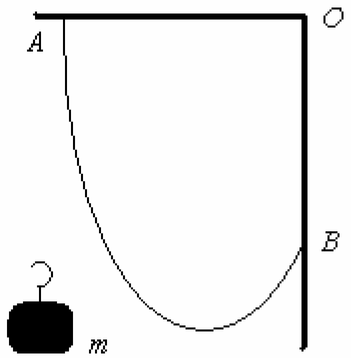
A. $l_1 < l_2$　　B. $l_3 < l_4$　　C. $l_1 > l_3$　　D. $l_2 = l_4$

解答

由于彈簧質量不考慮，所以四種情況下彈簧的伸長量只由力 F決定，力 F相同，則彈簧伸長量相同，所以 D 正確。

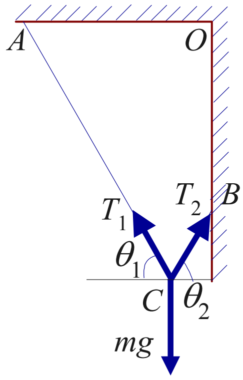
例題六

如圖所示，將一條輕而柔軟的細繩栓在天花板上的 A 點和豎直牆上的 B 點，A 和 B 到 O 點的距離相等，繩的長度是 OA 的 2 倍。現若將一質量爲 m 的重物，通過一個不計質量的勾掛在繩上，忽略勾與繩之間的摩擦，問在達到平衡時，繩受到的拉力是多少？



解答

考慮挂勾的平衡，受力情況如圖所示。



挂勾沿水平方向的平衡 $T_1\cos\theta_1 - T_2\cos\theta_2 = 0$.

視「掛勾」爲「滑輪」(僅改變力的方向，但不改變力的大小)，所以繩的張力 $T_1 = T_2 = T$，則有 $\theta_1 = \theta_2 = \theta$.

挂勾沿豎直方向的平衡 $T_1\sin\theta_1 + T_2\sin\theta_2 - mg = 0$，即

$$2Tsin\theta - mg = 0,\ T = \frac{mg}{2\sin\theta}.$$

由幾何關係: $OA = AC\cos\theta + BC\cos\theta = (AC + BC)\cos\theta$,

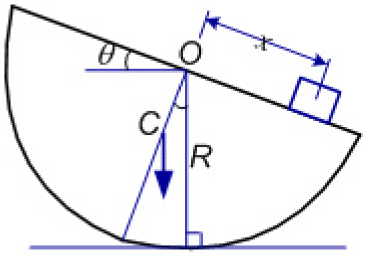
$$\cos\theta = \frac{OA}{AC+BC} = \frac{1}{2}, \quad \theta = 60^o.$$

$$T = \frac{mg}{2\sin 60^0} = \frac{mg}{\sqrt{3}}.$$

例題七 (第二屆泛珠三角物理奧林匹克力學基礎試競賽題 2)

(1) 半徑爲 R 的勻質半球體，半球體的質心在球心 O 正下方 C 點處，$OC = 3R/8$。半球放在水平面上，一個物體放在半球的平面上，其質量爲半球體質量的 1/8，且與半球平面間的動摩擦係數爲μ 。求無滑動時物體到球心 O 點距離 x 的最大值。

(2) 試指出靜置在水平面上的半球體(其上無物體)的平衡狀態(穩定/隨遇/不穩定),並加以簡單解釋。



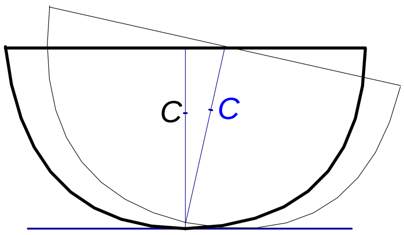
解答

(1)

$$\sum M_O = 0,\ G\left(\frac{3R}{8}\sin\theta\right) = \frac{G}{8}(x\cos\theta),\ \ x = 3R\tan\theta$$

$$f = mg\sin\theta, N = mg\cos\theta, \therefore \tan\theta = \frac{f}{N}$$

$$\tan\theta_m = \frac{f_m}{N} = \frac{\mu N}{N} = \mu,\ \ x_m = 3R\tan_m = 3\mu R$$



(2) 穩定平衡。如圖所示，與鄰近位置相比，它的重心最低，有最小的勢能。

第三章 牛頓運動定律和萬有引力定律

牛頓 (Isaac Newton, 1642 - 1727)，英國科學家，他是經典力學(即牛頓力學)的奠基人。牛頓在 1687 年出版了他的名著『自然哲學的數學原理』開創了自然科學發展史的新時期。在該書中，牛頓在伽利略等人工作的基礎上進行了深入研究和大量的實驗，最後總結出三大運動定律，奠定了經典力學的基礎，並成爲經典物理學的創始人。牛頓運動定律是經典力學的基礎，在研究宏觀物體的低速運動時完全適用。但牛頓運動定律不適用於研究微觀粒子和高速運動問題，這類問題要用量子力學和相對論去解決。

3.1 質量

基本概念和理論

表示物體所含物質的多少的物理量叫質量。質量是標量。在國際單位制中，質量被定爲基本量，其單位公斤(kg)爲物理基本單位之一。

物體的慣性大小用質量來表徵，這就是慣性質量。物體間產生萬有引力的能力的大小用質量表徵，這就是引力質量。當選擇的單位適當時，引力質量和慣性質量的數值是相等的，是同一物質的兩種屬性。在一般情況下統稱爲質量。

注意事項

1. 質量和重力是完全不同的物理量，質量是物體本身的屬性，而重力是外界對物體的作用。雖然用公斤力作爲力的單位，質量爲 1kg 的物體在緯度爲 45^0 的海平面上受的重力也是 1 公斤力，但在其他地方就不一定受 1 公斤力的重力了。

2. 質量和能量之間也存在著密切關係，物體的質量可作爲它們蘊藏的能量的量度，它們之間關係式 $E = m_0c^2$ 。

3. 根據相對論力學，高速運動物體，其質量隨速度增大而增大，即 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ ，式中 m_0 爲物體靜止質量，v 爲物體運動速度，c 爲光速。

3.2 牛頓第一定律

基本概念和理論

1. 牛頓第一定律的描述

一切物體總保持勻速直線運動狀態或靜止狀態不變，直到有外力迫使它改變這種狀態爲止。

2. 物體的慣性

物體保持原來的勻速直線運動狀態或靜止狀態的性質稱爲慣性，所以牛頓第一定律又叫做慣性定律。一切物體都具有慣性，慣性是物體固有的性質，質量是物體慣性大小的量度。

3. 物體的平衡狀態

任何物體都與周圍的物體相互作用，不受外力的物體是不存在的。實際物體的勻速直線運動狀態或靜止狀態，是由於受到作用力平衡的結果。

注意事項

1. 由牛頓第一定律可知，力不是維持運動的原因，而是改變運動狀態(產生加速度)的原因。

2. 牛頓第一定律是把真實的物體運動理想化(不受外力)而抽象出來的結論，是整個運動力學的基礎。它揭示了物體具有慣性，而整個動力學正是以慣性系爲參考系的。

3. 慣性是物體的一種屬性，它與物體做什麼運動，運動速度的大小以及受力情況無關。但在接近光速的高速運動中，物體慣性的大小會隨速度的變化而變化。

4. 理想實驗方法：也稱爲假想實驗，它是在可靠的經驗事實的基礎上，采用科學抽象思維來展開的實驗，是人們在思想上塑造的理想過程。

3.3 牛頓第二定律

基本概念和理論

物體的加速度跟所受的外力的合力 $\sum\vec{F}$ 成正比，跟物體的質量成反比，加速度的方向跟合外力的方向相同，這就是牛頓第二定律。其數學運算式爲 $\sum\vec{F} = km\vec{a}$ 。

物體的運動狀態是由它的初狀態和所受外力及其質量決定的。力是產生加速度的原因。

注意事項

1. 在國際單位制中，$\sum\vec{F}=km\vec{a}$ 的 k 爲不帶單位的 "l"，而定義出力的單位：1 牛頓 = 1 公斤米/秒 ^{2}，即在國際單位制中，牛頓第二定律的數學運算式爲 $\sum\vec{F}=m\vec{a}$ 。

2. 牛頓第二定律是力的瞬態作用規律。力和加速度同時產生，同時變化，同時消逝，當某時刻$\sum\vec{F}=0$時，加速度在該時刻亦爲零。

3. 加速度$\vec{a}$應是以相對地面靜止或做勻速直綫運動的物體爲參照物的加速度。

4. $\sum\vec{F}=m\vec{a}$是一個向量方程，應用時應規定正方向，凡與正方向相同的力或加速度均取正值，反之取負值。一般常取加速度方向爲正方向。根據力的獨立作用原理，在處理物體在一個平面內運動的問題，可將物體所受各力正交分解，在正交的方向上分別用其分量形式：$\sum F_x=ma_x$及$\sum F_y=ma_y$列方程。

5. 牛頓第二定律適用於一切宏觀物體的運動。

6. 確定各類公式中的比例係數有兩種方法：

a. 如果式中各物理量的單位已經確定，則需要用實驗手段來測定係數 k。如滑動摩擦系數、彈簧剛度系數、引力常量等屬于這種情况；

b. 如果式中尚有未規定單位的物理量，則可先人爲規定 k 的數值，再規定出待定的單位。如牛頓第二定律、歐姆定律中的 k 的取值就是如此。

3.4 牛頓第三定律

基本概念和理論

兩個物體之間的作用力和反作用力總是大小相等、方向相反、作用在一條直綫上。

注意事項

1. 作用力和反作用力分別作用在兩個不同的物體上，這是和作用在同一物體上的兩力平衡是完全不同的。例如，馬車加速前進時，馬拉車，車向後拉馬，若以爲馬拉車的力大于車拉馬的力，則混淆了相互作用力和兩力作用于同一個物體的區別。車加速運動是因爲馬對車的拉力大於車受的阻力的緣故，馬和車的相互作用是大小相同的力。

2. 作用力與反作用力同時產生，同時消失，分別作用于兩個物體，其產生的作用效果可以不同。例如，鷄蛋碰石頭，鷄蛋破了，不能由此以爲石頭對鷄蛋的作用力大於雞蛋對石頭的作用力；實際上，它們之間的相互作用力大小相等，相同大小的力作用在不同的物體上，其效果是不同的。

3. 作用力和反作用力是性質相同的力。如果作用力是摩擦力，則反作用力也必定是摩擦力。

4. 牛頓第三定律對靜止情況和運動情況都成立。例如，地球吸引蘋果，蘋果也吸引地球，相互吸引的力是一樣大的，不能因爲蘋果落向地球，就認爲地球吸引蘋果的力大些。又例如人站在升降的電梯中，無論電梯停止時還是加速運動時，人與電梯間的相互作用力總是相等。

5. 借助牛頓第三定律可以變換研究物件，從一個物體的受力分析過渡到另一個物體的受力分析。

3.5 超重和失重

基本概念和理論

1.在平衡狀態時，物體對水平支持物的壓力(或對懸繩的拉力)大小等於物體的重力。當物體在豎直方向上有加速度時，物體對支持物的壓力就不等于物體的重力了。

2.當物體的加速度向上時，物體對支持物的壓力大于物體的重力，這種現象稱爲超重。當物體的加速度向下時，物體對支持物的壓力小于物體的重力，這種現象稱爲失重。當物體向下的加速度等于 g 時，物體對支持物的壓力變爲零，這種狀態稱爲完全失重狀態。航天器進入軌道後可以認爲是繞地球做圓周運動，這跟在以重力加速度下降的升降機中發生的情況類似，航天器中的人和物都處于完全失重狀態。

3. 用測力計測量一個質量爲 m 的物體。物體的實際重力 mg，以地面爲參照物，物體共受兩個力：向下重力 mg 和測力計對物體向上的拉力 N。

a. 物體處於靜止或勻速直線運動時，物體加速度 $a = 0$，由牛頓第二定律有 $N - mg = ma = 0$，所以 $N = mg$，即視重等於實重。

b. 物體以向上加速度 a 豎直運動(可以向上加速或向減速運動)有 $N - mg = ma$，所以 $N = mg + ma$，$N > mg$，視重 > 實重，即超重現象，火箭加速上升時，火箭艙內的物體都要發生以很大的向下的壓力壓在支持物上的超重現象。

c. 當物體以向下加速度 a 豎直運動(可以向下加速或前上減速)有 $mg - N = ma$，所以 $N = mg - ma$，即 $N < mg$，視重<實重，即失重現象。

d. 當物體以向下的加速度 $a = g$ 豎直運動時，有 $mg - N = mg$，所以 $N = 0$，這時測力計示數爲零，視重爲零，即完全失重的情況。

注意事項

1. 物體處於超重或失重狀態時，物體的重力始終存在大小也沒有變化，總等於所在的位置處的重力。

2. 發生超重或失重現象與物體的速度無關，只决定于加速度。

3. 在完全失重的狀態下，平常一切由重力產生的物理到現象都會完全消失，如單擺停擺、天平失效、浸在水中的物體不再受到浮力，液體柱不再產生向下的壓强等。

3.6 隔離法

基本概念和理論

隔離法是正確進行受力分析、應用牛頓定律解題有效方法。隔離也就是圍繞所考慮的物體或物體系統， 畫出一想像的邊界，使研究物件與外界環境隔離，這樣外界對研究物件的作用就能明顯地顯示出來。

注意事項

在選取研究物件時，可以把系統整體與外界隔離，也可以把系統的一部分隔離。當把系統整體隔離時，系統內部相互作用力爲內力，可以不考慮(因爲內力成對，大小相等，方向相反)。當把一些部分隔離時，系統的其他部分對隔離部分的作用就是隔離部分受到的外力。所以隔離的目的就是把整體的內力變爲對某一部分受到的外力，以便應用牛頓定律求解。

解題過程要根據各隔離體的受力情況和運動情況，分別寫出牛頓第二定律方程。有幾個未知量，就應有幾個方程，其中包含根據運動學規律寫出的方程。

隔離法和整體法是相互依存，相互補充的兩種方法，有時同時使用或相互配合交替使用，常能更有效地解決有關連接體的問題。

3.7 應用牛頓運動定律解題

基本方法和應用

1. 題目主要分爲兩大類

(1) 知道物體受力情況，應用牛頓第二定律求加速度，再根據物體的初始條件，應用運動學公式求出物體的運動情況，如任意時刻的位置、速度及運動軌迹等。

(2) 知道物體的運動情況，求出物體的加速度，應用牛頓第二定律求出物體的受力情況。

2. 解題的一般步驟

a. 分析題意，選取研究對象，正確選定參照物，一般應選相對于地面靜止或勻速直綫運動的系統爲參照物來判斷研究物件的運動情況。

b. 分析研究物件的受力情況和運動情況。

c. 當研究物件所受外力不在一條直線上時，如果物體只受兩個力，可以用平行四邊形定則求合力，若受力較多，可把它們正交分解到兩個方向上分別求出合力，寫出具體的牛頓第二定律方程。

d. 統一用國際單位制進行運算，求出結果，並對結果進行必要的檢驗和討論。

3. 牛頓第二定律中涉及 F、m、a 三個物理量，運動學中涉及 v_0、v_t、a、t、s 五個物理量，其中加速度 a 是連接牛頓第二定律和運動學的橋樑，是解動力學問題的關鍵。

$\boxed{\text{物體受力情況}} \Leftrightarrow \boxed{\text{牛頓第二定律}} \Leftrightarrow \boxed{\text{加速度 } a} \Leftrightarrow \boxed{\text{運動學公式}} \Leftrightarrow \boxed{\text{物體運動情況}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} F = G\dfrac{Mm}{r^2} \\ G = mg \\ F = -kx \\ f = -\mu N \\ F_{\text{電}} = Eq \\ F_{\text{安}} = BIL \\ F_{\text{洛}} = qvB \end{array}} \Longrightarrow \boxed{\Sigma F = m\boldsymbol{a}} \Longleftarrow \boxed{\begin{array}{l} a = \dfrac{v-u}{t} \\ a = \dfrac{2(s-ut)}{t^2} \\ a = \dfrac{v^2-u^2}{2s} \\ a = r\omega^2 = \dfrac{v^2}{r} = 4\pi^2 rf^2 \\ a = -\dfrac{kx}{m} \end{array}}$$

3.8 圓周運動中的動力學問題

<u>基本概念和理論</u>

向心力是根據力的效果命名的力，向心力的作用是產生向心加速度，用來改變圓周運動的物體的綫速度的方向，維持物體做圓周運動。

向心力加速度 $a = r\omega^2 = \dfrac{v^2}{r}$ ，根據牛頓第二定律 $\sum F = ma = mr\omega^2 = m\dfrac{v^2}{r}$ 。

<u>注意事項</u>

向心力是作用在做勻速圓周運動物體上的所有外力的合力，其大小不改變，其方向總指向圓心，時刻發生變化，總垂直于綫速度方向。向心力不對物體做功。

3.9 萬有引力定律

<u>基本概念和理論</u>

任何兩體都是相互吸引的，引力的大小跟兩個物體的質量成正比，跟它們距離的二次方成反比。這個規律是萬有引力定律。

表達式： $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$ ，其中引力恒量 $G = 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2/kg^2}$ 。

<u>注意事項</u>

1.地面上的物體與地球之間的引力，可分解爲重力和物體隨地球自轉所需的向心力。其大小隨緯度而變化。

2.萬有引力定律在天體運動中有廣泛的應用。解決此類問題時，地球表面物體所受重力可近似等於萬有引力，即 $mg = G\dfrac{Mm}{R_0^2}$ ，可推出 $GM = gR_0^2$ ，其中 R_0 爲地球半徑，M 爲地球質量。

3.10 非慣性參考系

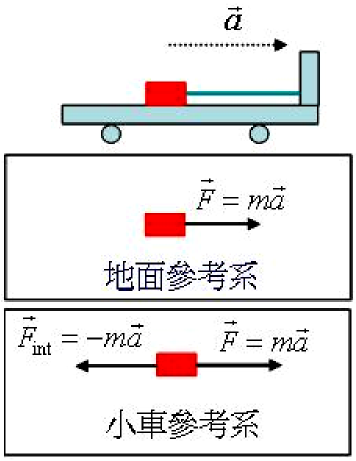
有時，選擇一個正在加速的參考系統會更加方便。在第一章，我們有 $\vec{a}=\vec{a}'+\vec{A}$，其中 $\vec{a}$ 是物體對于慣性參考系 S 的加速度，$\vec{a}'$ 是物體對于參考系 S'的加速度，$\vec{A}$ 是參考系 S'相對于參考系 S 的加速度。慣性力是一個 “虛力”，它出現在作加速運動的參考系 S'中。假設參考系 S 沒有作加速運動，根據牛頓第二定律，$\vec{F}=m\vec{a}=m(\vec{a}'+\vec{A})$。那麽在參考系 S' 中，$\vec{F}-m\vec{A}=m\vec{a}'$，即似乎存在一個附加力

$$\vec{F}_{\text{int}}=-m\vec{A} \qquad (3.4)$$

作用在物體上。

<u>例題</u>

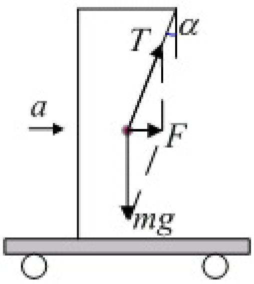
一放置于小車光滑平面上的滑塊被細繩系于墻上，小車作加速運動。相對於“地面參考系”，作用於滑塊的力 $\vec{F}$ 保持滑塊與小車一起作加速運動，於是有 $\vec{F}=m\vec{a}$。在“小車參考系”中，滑塊是靜止的，但是細繩有一個力作用於滑塊上，這個力與慣性力 $\vec{F}_{\text{int}}=-m\vec{a}$ “平衡”。



3.11 綜合例題

<u>例題一</u>

如圖所示，在一小車上固定一直角支架，小球用細綫懸挂在支架上，現小車水平向右運動，加速度大小爲 $a=2.5\ \text{m/s}^2$，則細綫向什麽方向偏離豎直方向 ？ 偏角 α 爲多大 ？

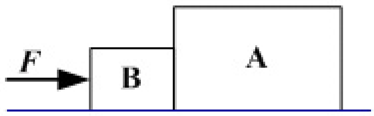


<u>分析與解答</u>

小車向右運動，若勻速運動，小球受拉力和重力是一對平衡力，細綫處于豎立方向。現小車向右做勻加速直綫運動，由牛頓第二定律的向量性可知，小球受合力的方向也應水平向右，所以細綫向左偏離豎直方向，再由 $F=mg\tan\alpha=ma$，可得偏角 $\alpha=\arctan\dfrac{a}{g}=\underline{14^0}$。

例題二

如圖所示，質量不等的兩木塊 A 和 B 放在光滑的水平面上，當水平力 F 作用于 B 的左端，兩物體一起加速運動時，A、B 間作用力大小為 N_1；當水平力 F 作用於 A 的右端，兩物間作用力大小為 N_2，下列哪項是正確 ？



A. $N_1 + N_2 < \mathrm{F}$　　B. $N_1 + N_2 = \mathrm{F}$　　C. $N_1 + N_2 > \mathrm{F}$　　D. N_1：$N_2 = m_\mathrm{A}$：m_B

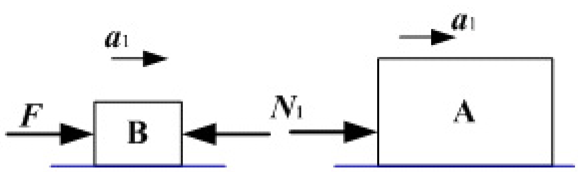
分析與解答

當在力 F 作用下，A、B 一起水平向右加速運動時，A、B 間的相互作用力為 N_1，理解為 A 對 B 的推力和 B 對 A 的推力這一對作用力和反作用力的大小都為 N_1，對 N_2 也做同樣的理解。

在力 F 的作用下，A、B 以相同的加速度 a_1 水平向右加速運動。根據牛頓第二定律可知

$$F = (m_A + m_B)a_1 \text{，得 } a_1 = \frac{F}{m_A + m_B} \text{。}$$

對 A、B 物塊分別作隔離後力的分析，其受力圖如圖所示，分別對 A、B 建立方程得



$$F - N_1 = m_B a_1, \quad N_1 = m_A a_1 = \frac{m_A F}{m_A + m_B} \text{。}$$

同理，當力 F 作用於 A 的右端時，A、B 以相同的加速度 a_1 水平向左加速運動，對 A、B 物塊做同樣的處理可得 $N_2 = m_B a_1 = \dfrac{m_B F}{m_A + m_B}$ 。

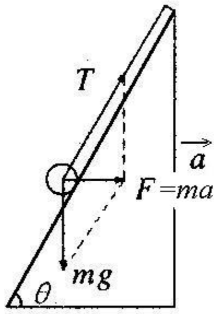
於是可以得到下面的結果:

$$N_1 + N_2 = \frac{m_A F}{m_A + m_B} + \frac{m_B F}{m_A + m_B} = F, \quad N_1 : N_2 = \frac{m_A F}{m_A + m_B} : \frac{m_B F}{m_A + m_B} = m_A : m_B .$$

答案 B、D

例題三

如圖所示，一個質量爲 0.2kg 的小球，用細繩吊在傾角 $\theta = 53^0$ 的斜面頂端，斜面靜止時，球緊靠在斜面上，繩與斜面平行，當斜面以 10m/s^2 加速度向右運動時，求繩子的拉力反斜面對小球的彈力。



分析與解答

把加速度 a 按兩個極端情況來分析：當 a 較小($a\to 0$ 時)，小球受重力、繩的拉力和斜面的支持力作用，繩平行于斜面；當 a 足够大時，小球將"飛離"斜面，此時繩與水平方向的夾角未知，所以要先求出小球離開斜面的臨界值。

在臨界狀態，小球對斜面的壓力 F_N 剛好爲零，即：

$$T\cos\theta = ma_0,\quad T\sin\theta = mg\ ,$$

解得 $a_0 = g\cot\theta = 7.5\text{m/s}^2$。

顯然當 $a = 10\ \text{m/s}^2 > a_0$ 時，小球已離開斜面，則 $F_N = 0$，$T = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2} = 2.83\,\text{N}$。

答案：拉力爲 2.8N，彈力爲零。

例題四

汽車沿半徑爲 R 的圓跑道行駛。設跑道的路面是水平的，路面作用于車的摩擦力的最大值是車重的 1/10，要使汽車不致沖出圓跑道，試求車速的最大值。

分析與解答

一般圓形跑道(如自行車賽跑道)設計時都使外側高，內側低，從而使車受到向心力作用，維持圓周運動。本題跑道是水平的，則只能靠路面對車的靜摩擦力作爲向心力來維持車的圓周運動。車速大時，要求摩擦大，當車速達到一定值時，摩擦力達到最大摩擦，此速度爲臨界條件，車速超過這個臨界值時，摩擦力不能再增加了，于是圓周運動不能維持了，即車要衝出圓跑道。設臨界速度爲 v，於是可列方程式 $\dfrac{mg}{10} = m\dfrac{v^2}{R}$，求得 $v = \sqrt{\dfrac{Rg}{10}}$。

例題五

一艘太空船繞一個不知名的行星表面飛行。要測定行星的密度，僅僅只需測定

A. 環繞半徑　　B. 行星的體積　　C. 運動速度　　D. 運行週期

分析與解答

這是一個基本概念和理論應用題。因爲 $M=\dfrac{4\pi^2R^3}{GT^2}$，所以 $\rho=\dfrac{M}{V}=\dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\dfrac{3\pi R^3}{GT^2r^3}$，式中 R 爲軌道半徑，r 爲行星半徑。因爲已知宇宙飛船繞行星表面飛行，所以 $R=r$，故有 $\rho=\dfrac{3\pi}{GT^2}$ 。

答案 D。

例題六

若人造衛星繞地球做勻速圓周運動，則下列說法正確的是

A. 衛星的軌道半徑越大，它的運行速度越大

B. 衛星的軌道半徑越大，它的運行速度越小

C. 軌道半徑越大，它需要的向心力越大

D. 軌道半徑越大，它需要的向心力越小

分析與解答

據 $v=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$ ，可知 B 項正確。衛星運動的向心力等于地球與衛星之間的萬有引力，即 $F=G\dfrac{Mm}{R^2}$ ，當 m 一定時，R 越大，則向心力越小。

答案 B、D。

例題七

地核的體積約爲整個地球體積的 16%，地核的質量約爲地球質量的 34%，試估算，地核的平均密度。(結果取兩位有效數字，$R_{地}=6400$ km，$G=6.67\times10^{-11}$ N m^2 / kg^2)

分析與解答

本題所提供的已知條件很少，但從題最後括弧內提供的資料可以看出，要應用萬有引力知識求解。又因爲題中要求的是估算，因而可以認爲重力等於萬有引力。這樣一來所能運用的公式和已知條件使豐富多了。

設 g 爲地球表面的重力加速度，重力近似等于萬有引力

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \quad \text{(i)}$$

式中 M、m 分別表示地球質量和虛擬物體的質量。

$$\text{根據 } \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \text{ ，(ii)}$$

解(i)、(ii)兩式得 $\rho = \frac{3g}{4\pi RG}$ (iii)

將(iii)式代入數據幷保留兩位元有效數字

$$\rho = \frac{3\times 9.8}{4\times 3.14\times 6.4\times 10^{6}\times 6.67\times 10^{-11}} = 5483.3\ \text{kg/m}^3\text{。} \qquad \text{(iv)}$$

根據 $\frac{m}{M} = 0.34,\quad \frac{v}{V} = 0.16$ ，式中 m、v 分別表示地核的質量和體積。

地核密度和地球密度的關係式爲 $\frac{\rho_{核}}{\rho} = \frac{0.34}{0.16}$ (v)

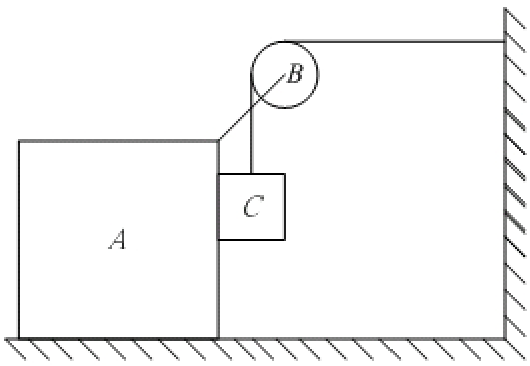
解(iv)、(v)兩式得地核的平均密度 $\rho_{核} = 1.2\times 10^4\ \text{kg /m}^3$

例題八 (首屆泛珠三角物理奧林匹克力學基礎試競賽題 4)

圖中 A 是一放在滑動摩擦係數爲 μ_A 地面上、質量爲 M 的立方體木塊。B 是一個固定在木塊 A 上的定滑輪，質量不計。C 是一用不可伸長的輕細線拴著、質量爲 m 的小木塊，它的一邊與木塊 A 的豎直邊緊靠著，接觸面的滑動摩擦係數爲 μ_C。拴小木塊 C 的輕細線跨過光滑的定滑輪 B 固定在豎直牆上，從固定點 O 到定滑輪 B 的那段細線是水平的。試：

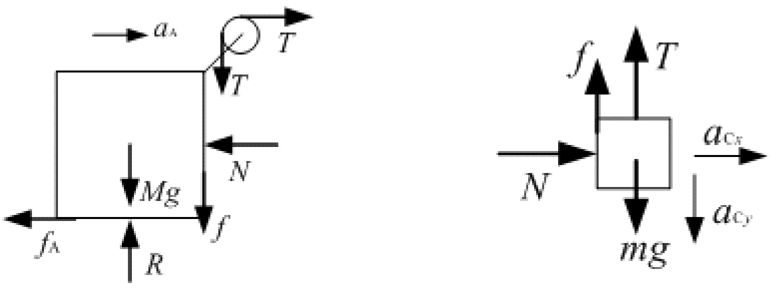
(a) 分別繪出木塊 A 和木塊 C 的受力圖，及指出運動方向。

(b) 求木塊 A 的加速度。



分析與解答

(a)



(b) 由牛頓運動定律得到

物體 A: $T - N - f_A = Ma_A$, (1)

$R - Mg - T - f = 0$; (2)

物體 C: $N = ma_{Cx}$, (3)

$mg - T - f = ma_{Cy}$, (4)

其中 $f_A = \mu_A R,\ f = \mu_C N$ (5)

由於細線不可伸長, $a_A = a_{Cx} = a_{Cy} = a$. (6)

由(1)至(6), 解得: $a = \dfrac{(1-\mu_A)m - \mu_A M}{(2-\mu_A+\mu_C)m + M}g$.

例題九 (第二屆泛珠三角物理奧林匹克力學基礎試競賽題 3)

質量爲 M、傾角爲α 的三角形塊置於滑動摩擦係數均爲μ 的水平地面上，光滑斜面和豎直面的頂端有一個定滑輪用一輕質綫連接質量爲 m_1 和 m_2 兩個物體。爲了使木塊 m_1 和 m_2 不沿豎直面和斜面滑動，可對斜面 M 施加一個水平拉力 F。試求：(a) 系統水平運動的加速度 a；(b) 力 F。

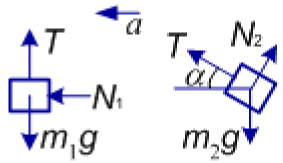
分析與解答

(a) 設開始時 m_1 和 m_2 兩個物體與物體 M 相對靜止。今在水平拉力 F 作用下仍然沒有相對運動，則二者對地面具有相同的水平方向運動的加速度 a。又因沒有相對運動，其間不存在滑動摩擦力。

$$\sum F_y = 0, \quad T = m_1 g$$

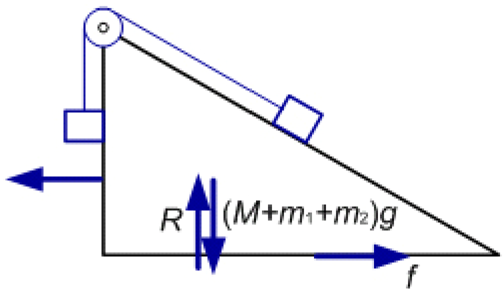
$$\sum F_x = ma, T\cos\alpha - N_2 \sin\alpha = m_2 a$$
$$\sum F_y = 0, \quad T\sin\alpha + N_2\cos\alpha = m_2 g$$

$$T\cos^2\alpha - N_2\sin\alpha\cos\alpha = m_2 a\cos\alpha$$
$$T\sin^2\alpha + N_2\sin\alpha\cos\alpha = m_2 g\sin\alpha$$



$$T = m_2 g\sin\alpha + m_2 a\cos\alpha$$
$$m_1 g = m_2 g\sin\alpha + m_2 a\cos\alpha$$
$$a = \frac{m_1 - m_2\sin\alpha}{m_2\cos\alpha} g$$

(b)



$$\sum F_x = ma,\ F - f = (M + m_1 + m_2)a$$
$$\sum F_y = 0,\quad R = (M + m_1 + m_2)g$$
$$F = \mu R + (M + m_1 + m_2)a = (M + m_1 + m_2)(\mu g + a)$$
$$F = (M + m_1 + m_2)g(\mu + \frac{m_1 - m_2\sin\alpha}{m_2\cos\alpha})$$

第四章 動量及動量定理

4.1 動量

基本概念和理論

(1) 動量的定義

運動物體的質量和速度的乘積，稱爲動量，是描述物體運動狀態的物理量，是狀態量，即

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (4.1)$$

動量 $\vec{p}$ 是向量，其方向與 $\vec{v}$ 相同。兩個動量相同，必須是大小相等，方向相同。

(2) 動量的瞬時性

通常所說物體動量是指物體在某一時刻的動量，它與物體的瞬時速度相對應。

(3) 動量的相對性

物體的動量與參照物的選取有關，同一物體運動，相對不同的參照物動量是不同的。在不說明參照物的情况下，物體的動量一般是相對地面而言。

(4) 動量的運算服從向量運算的平行四邊形定則

例題驗證

例一

一個物體品質爲 2.0 Kg，速度爲 $\vec{v} = (3\vec{x}_0 - 5\vec{y}_0 + 6\vec{z}_0)\ m/s$ ，求它的動量。

答案: $\vec{p} = m\vec{v} = (6\vec{x}_0 - 10\vec{y}_0 + 12\vec{z}_0)\ \mathrm{kg} \cdot m/s$

例二

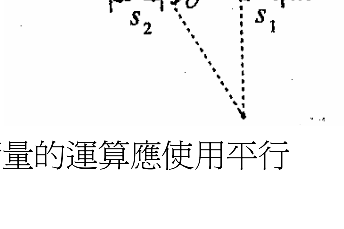
一個物體在下述運動中，動量發生變化的是

A.勻速直線運動　B.勻速圓周運動　C.平拋運動　D.豎直上拋運動

解析 動量是向量，所以動量是否發生變化，不僅要看大小，還要看方向。

答案 B、C、D。

4.2 衝量



基本概念和理論

(1) 某力對物體的衝量等於該力與力的作用時間的乘積 $\vec{I} = \vec{F}t$ ，衝量是描寫力對時間的積累效應的物理量。

(2) 衝量也是向量，當力爲恒力時，衝量的方向與力的方向一致，衝量的運算應使用平行四邊形定則。

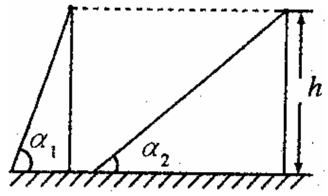
(3) 在國際單位制中，衝量單位爲牛·秒 (N-s)。

注意事項

　　某恒力對物體的衝量就等于力和作用時間的乘積，與物體是否運動無關；變力的衝量大小可用 F-t 圖上的"面積"表示，也可用動量定理求出。

例題驗證

例三



兩個質量相等的物體在同一高度沿傾角不同的兩個光滑斜面由靜止自由滑下，到達斜面底端的過程中，兩個物體具有相同的物理量是

A.重力的衝量　　B.側面上受到的彈力的衝量

C.在斜面上受到的合外力的衝量　　D.動量

E.滑到斜面底端時動量的水平分量　　F.以上幾個量都不同

解析

本題考查了衝量和動量的向量性。設物體質量爲 m，沿傾角爲α_1 的斜面下滑的加速度爲 a_1，根據牛頓第二定律可得 $mg\sin\alpha_1 = ma_1$。

　　設斜面高度爲 h，根據初速度爲 0 的勻變速直綫運動的位移公式和速度公式得滑到底端所用時間 t_1 和速度 v_1 分別爲 $t_1 = \dfrac{1}{\sin\alpha_1}\sqrt{\dfrac{2h}{g}},\quad v_1 = \sqrt{2gh}$ 。

　　速度 v_1 的水平分量 $v_1^{'} = v_1\cos\alpha_1$ 。滑到底端動量水平分量 $p_1 = m\sqrt{2gh}\cos\alpha_1$ 。

　　同理可得出在傾角爲α_2 的斜面上運動時重力衝量 $I_{\alpha 2} = mg\sqrt{\dfrac{2h}{g\sin^2\alpha_2}}$ ，

　　到底端時動量水平分量 $p_2 = m\sqrt{2gh}\cos\alpha_2$ 。因爲 $\alpha_1 \neq \alpha_2$，所以 $I_{\alpha 1} \neq I_{\alpha 2}$、$P_1 \neq P_2$，所以答案 A、E 是錯誤的。

　　由于斜面傾角不同，物體在斜面上受到的彈力、合外力以及到底端速度方向均不同，所以彈力的衝量，合外力衝量以及滑到底端時動量均不同，因此答案 B 、C 、D 也是錯誤的。

正確答案 F。

4.3 動量定理

基本概念和理論

　　物體所受合外力的衝量等于物體的動量變化，這個結論稱爲動量定理。 設動量爲 $\vec{p}_1$ 的物體，在恒定外力 $\vec{F}$ 作用下，經過時間Δt，動量變成 $\vec{p}_2$ ，則動量定理可表示爲：

$$\vec{F}\Delta t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \qquad (4.2)$$

注意事項

1. 動量 $\vec{p}=m\vec{v}$ 是一個狀態量，變速運動的物體在不同時刻有不同的動量。 衝量 $\vec{F}\Delta t$ 是一個過程量。物體受到的衝量使物體的動量發生變化。 動量是向量，衝量也是向量，動量定理不僅表示合外力的衝量和物體的動量變化的數値相等； 而且表示外力的衝量的方向和動量變化量的方向相同。 不要把衝量的方向和動量的方向等同起來。 用動量定理計算問題時，要采用平行四邊形法則，正交分解法等向量運演算法則。

2. 對于同一直綫上運動的物體，首先規定一個方向爲正方向，凡方向與規定的正方向一致的量取正値，反之取負値。動量增量(即變化量)必須是未動量減初動量。 所受外力應是合外力，如果物體同時受幾個力，則各力的正、負號應按規定的正方向來確定。

3. 對於初動量和末動量互成角度的情況，計算 $\Delta\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1$ 則採用平行四邊形法則或正交分解法計算。

4. 動量定理

$$\vec{F}_{Total}\Delta t=\vec{p}_2-\vec{p}_1 \qquad (4.3)$$

既適用于多個物體組成的物體系統，也適用于單個物體。 總動量指物體系統內各物體動量的向量和，合外力指物體系統所受外力的向量和不包括物體系統內每個物體間的相互作用力即不包括相互作用的內力。同樣一個力對物體系統來說，可以是內力，當用隔離法以物體系內某一物體爲研究對象時，則是外力。 例：水平發射炮彈的大炮，不計炮身與地面間的摩擦阻力，發射炮彈時，火藥燃燒産生的氣體的推力，對炮彈來說是外力，對炮身來說也是外力，但對炮身和炮彈組成的物體系統來說，則是內力，內力産生的合衝量爲零，物體系統的總動量無變化。

5. 動量定理是根據牛頓第二定律 $\vec{F}_{\text{resultant}}=m\vec{a}$ 和運動學公式 $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t$ ，在力恒定的情況下推導出來的。 牛頓第二定律也可表達爲物體的動量對時間的變化率等于所受到的合外力，即 $F_{合}=\dfrac{\Delta p}{\Delta t}$。牛頓第二定律反映力的瞬時效果；動量定理反映了力的持續效果。動量定理不僅適用于恒定的力，也適用于隨時間變化的力。 對於變力，動量定理中的力 $\vec{F}$ 應當理解爲變力在作用時間內的平均値。在不需要瞭解力的變化的情況下，可用比較運動的始末兩個狀態的動量變化，即可求得解答。用牛頓第二定律就很難甚至無法解決問題。

動量定理爲我們提供瞭解決這類動力學問題的一種重要方法，它的不足是不能說明物體運動變化與外界作用力間的瞬時關係，而牛頓第二定律和動量定理兩者相互補充，爲解決動力學問題提供了不同的分析方法。

6. 用動量定理解釋的現象一般可分爲兩大類：一類是物體的動量變化一定，此時力的作用時間越短，力就越大，時間越長，力就越小。另一類是作用力一定，此時作用時間越長，Δp 越大，力的作用時間越短，Δp 越小。

4.4 碰撞

基本概念和理論

碰撞指的是物體間相互作用持續時間很短，而物體間相互作用力很大的現象。

注意事項

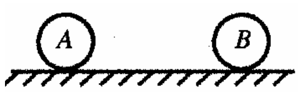
1. 在碰撞現象中，一般都滿足內力遠大于外力，故可以用動量守恒定律處理碰撞問題。按碰撞前後物體的動量是否在一條直線上有正碰和斜碰之分。

2. 一般碰撞過程中，系統的總動能會有所減少，若總動能的損失很小，可以略去不計。這種碰撞稱爲彈性碰撞。若兩物體碰後粘合在一起，這種碰撞動能損失最多，稱爲完全非彈性碰撞。一般情況下系統的動能都不會增加 (有其他形式的能轉化爲機械能，如爆炸過程等除外)，這能量關係也常是判斷一些結論是否成立的依據。另外還有一種碰撞，兩物體碰後分開，但能量損失不能忽略，稱爲非完全彈性碰撞。

例題驗證

例四

如圖所示，光滑水平面上有大小相同的 A、B 附在同一直線上運動。兩球質量關係爲 $m_B = 2m_A$，規定向右爲正方向，A、B 兩球的動量均爲 6 kg·m/s，運動中兩球發生碰撞，碰撞後 A 球的動量增量爲 -4 kg·m/s，則



A. 左方是 A 球，碰撞後 A、B 兩球速度大小之比爲 2：5
B. 左方是 A 球，碰撞後 A、B 兩球速度大小之比爲 1：10
C. 右方是 A 球，碰撞後 A、B 兩球速度大小之比爲 2：5
D. 右方是 A 球，碰撞後 A、B 兩球速度大小之比爲 1：10

解析: 碰撞後，A 球的動量增量爲 -4kg·m/s，則 B 球的動量增量爲 4kg·m/s，所以 A 球的動量 $m_A v_A = 2$ kg·m/s 及 B 球的動量 $m_B v_B = 10$ kg·m/s，而 $m_B = 2m_A$，得到 $\frac{v_A}{v_B} = \frac{2}{5}$。

答案 A。

例五

質量爲 m 的鋼球自高處落下，以速率 v_1 碰地，豎直向上彈回，碰撞時間極短，離地的速率爲 v_2。在碰撞過程中，地面對鋼球的衝量的方向和大小爲

A. 向下，$m(v_1 - v_2)$　B. 向下，$m(v_1 + v_2)$　C. 向上，$m(v_1 - v_2)$　D. 向上，$m(v_1 + v_2)$

解析: 運用動量定理解決問題時，有時由於作用時間極短，此時重力衝量可以忽略。所以上述問題中，物體所受合外力衝量只有地面對其作用力的衝量；又因動量和衝量均爲向量，計算時要注意方向性。若規定 v_2 爲正向，則 $P_1 = mv_1, P_2 = mv_2$。

動量定理應表達爲 $I = mv_2 - (-mv_1) = m(v_1 + v_2)$，方向與 v_2 相同，即向上。

答案 D。

4.5 綜合例題

例題一

據報道，1981 年 10 月的一天，香港的一位 3 歲小男孩從 15 層高樓墜下，被地面的一位人仕接住，幸免于難。假若小男孩與他的救命恩人間的相互作用時間是 0.50s，那麼

(1) 試估算救命恩人受到的平均衝擊力多大?

(2) 假設救命恩人接住小孩時，衝擊力的作用點離肘關節 0.10 m，手臂部肌肉的拉力離肘關節 0.02m，試估算救命恩人手臂肌肉所受拉力多大?
(3) 若一般肌腱的拉伸強度的極限爲 10^8 N/m^2，臂肌張緊時的平均橫截面積爲 50 mm^2，試估算救命恩人是否會因救人而受傷?

解析與答案

此題爲生物力學問題，考查了力學知識和生物知識，分析綜合題時應明確各部分所考查的知識點及所應用的規律，并注意將實際問題模型化，這也是學好物理的重要方法。

(1) 設15層樓高爲$H = 15h = 45$m (一層樓高約爲3m)

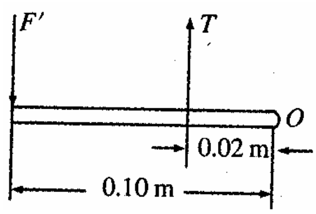
下落速度爲 v 時小孩被接住，則由運動學規律得出$v = \sqrt{2gH} = 30$m/s。

小孩體重約 15 kg，接住瞬間小孩受力如圖所示，此時$(F - G)\Delta t = m\Delta v$ ，所以 $F = G + \dfrac{m\Delta v}{\Delta t}$ ，代入資料解得 F = 1050N。

(2) 再由牛頓第三定律得救命恩人受到的平均衝力 $F' = F$ = 1050N。

由生物知識可知手受力類似于杠杆受力，如圖(b)所示，設肘關節處爲 O 點，手臂部肌肉的拉力爲 T。

由杠杆平衡得$F' \cdot L_1 = T \cdot L_2$ 。代入資料得 T = 5250N。



(3) 因爲拉伸強度 $p = \dfrac{F_{拉}}{A} = \dfrac{5250\text{N}}{50\times10^{-6}\text{m}^2} = 1.05\times10^8$ Pa，所以救命恩人可能會因救人而受傷。

例題二

甲、乙兩個溜冰者，質量都爲 30kg，甲手上拿著一個質量爲 15kg 的箱子，兩人均以 v_0 = 2m/s 的速度在一條直綫上相向運動，爲了避免相撞，甲將箱子水平推給乙。試求：甲至少用多大的速度將箱子推出才可避免與乙相碰? (不考慮阻力，如圖所示)

解析與答案

該題考查動量守恒定律的應用。使用動量守恒定律研究多個物體之間的相互作用，關鍵在于選好研究對象，抓住臨界狀態。本題可以甲、乙和木箱作爲研究對象，也可分別以甲與和乙與木箱作爲研究對象，寫出動量守恒定律的關系式。

甲和乙不相碰的臨界條件是：甲推出箱子後的速度與乙得到箱子後的速度相同。

設甲、乙質量均爲 M，箱子質量爲 m。v_1 爲甲相對於地的速度，v_2 爲乙相對於地的速度，v 爲箱子對地速度，規定甲的 v_0 方向爲正方向。

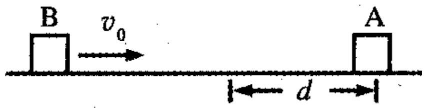
對甲、箱子組成的系統，根據動量守恒有$(m + M)v_0 = mv + Mv_1$，即$(30+15)\times2=30v_1+15v$

對乙、箱子組成的系統，根據動量守恒有$mv - Mv_0 = (m + M)v_2$ ，即 $15v-30\times2 = 45v_2$

因 $v_1 = v_2$，聯立解得 v = 5.2m/s。

即甲推箱子的速度只要大于或等于 5.2m/s，他倆就不會發生碰撞。

思考題一



對於兩物件碰撞前後速度在同一直綫上且無機械能損失的碰撞過程，可以簡化爲如下模型：A、B 兩物體位于光滑水平面上，僅限于沿同一直綫運動。當它們之間的距離大於等於某一定値 d 時，相互作用力爲零；當它們之間的距離小於 d 時，存在大小恒爲 F 的排斥力。

設 A 物體質量 $m_1 = 1.0\text{kg}$，開始時靜止在直線上某點；B 物體質量 $m_2 = 3.0\text{kg}$，以速度 v_0 從遠處沿該直綫向 A 運動，如圖所示。若 $d = 0.10\text{m}$， F = 0.60N，$v_0 = 0.20\text{m/s}$，求：

(1) 相互作用過程中 A、B 加速度的大小；

(2) 從開始相互作用到 A、B 間的距離最小時，系統(物體組)動能的減少量；

(3) A、B 間的最小距離。

答案

(1) $a_1 = 0.60\text{m/s}^2, \quad a_2 = 0.20\text{m/s}^2$

(2) 0.015 J

(3) 0.075 m

思考題二

一個質量爲 M 的雪橇靜止在水平雪地上，一條質量爲 m 的愛斯基摩狗站在該雪橇上，狗向雪橇的正後方跳下，隨後又追趕并向前跳上雪橇；其後狗又反復地跳下、追趕並跳上雪橇。狗與雪橇始終沿一條直線運動。若狗跳離雪橇時雪橇的速度爲 V，則此時狗相對于地面的速度爲 $V+u$ (其中 u 爲狗相對於雪橇的速度，$V+u$ 爲代數和，若以雪橇運動的方向爲正方向，則 V 爲正値，u 爲負值)。設狗總以速度 v 追趕和跳上雪橇，雪橇與雪地間的摩擦忽略不計。已知 v 的大小爲 5m/s，u 的大小爲 4m/s，$M = 30$ kg，$m = 10$ kg。

(1) 求狗第一次跳上雪橇後兩者的共同速度的大小；

(2) 求雪橇最終速度的大小和狗最多能跳上雪橇的次數。

(供使用但不一定用到的對數值：log2 = 0.301， log3 = 0.477)

答案

(1) $V_1' = 2\text{m/s}$

(2) 3 次

(3) 5.625 m/s

第五章 功、機械能及動能定理

5.1 功和功率

基本概念和理論

物體受到力的作用，并且在力的方向上發生一段位移，就叫做力對物體做了功。力和在力的方向上發生的位移是做功的兩個必不可少的因素。

(1) 計算功的一般公式

$$W \equiv \vec{F}\cdot\vec{S} = FS\cos\alpha \qquad (5.1)$$

其中力 $\vec{F}$ 在位移 $\vec{S}$ 上應是恒力，α 是 $\vec{F}$ 與 $\vec{S}$ 的夾角。

當 $\alpha = 90^0$ 時，則力 $\vec{F}$ 不做功；當 $0^0 \le \alpha < 90^0$ 時，則力 $\vec{F}$ 對物體做正功；

當 $90^0 < \alpha \le 180^0$ 時，則力 $\vec{F}$ 對物體做負功(或者說物體克服力 $\vec{F}$ 做功)。

(2) 功是標量

功的正、負表示是動力對物體做功還是阻力對物體做功，前者取正值，後者取負值。當力對物體做正功時，物體要獲得能量，當物體克服阻力做功時，物體要消耗能量。

(3) 合外力對物體做功的計算

當物體同時受到幾個力作用時，計算合外力對物體做的功，有兩種方法：

(a) 先用平行四邊形定則或正交分解法求出合外力 $F_{合}$，再根據 $W = Fs\cos\alpha$ 計算功，注意 α 應是合外力與位移方向之間的夾角。

(b) 先分別求出各個外力的功：$W_1 = F_1 s\cos\alpha_1$，$W_2 = F_2 s\cos\alpha_2$，$W_3 = F_3 s\cos\alpha_3$，…。再求各外力的功的代數和，即 $W = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots$。

(4) 功率

功跟完成這些功所用時間的比叫做功率，功率是表示物體做功快慢的物理量。方程式：

(a) $P = \dfrac{W}{t}$，這是物體在 t 時間內的平均功率。

(b) $P = \vec{F}\cdot\vec{v} = Fv\cos\alpha$，當 v 是瞬時速度時，P 是瞬時功率，當 v 是平均速度時，P 是平均功率，α 是 F 與 v 方向的夾角。

發動機銘牌上的額定功率是指發動機正常工作時的最大輸出功率，但發動機實際輸出功率不一定等于額定功率，實際功率可在零和額定值之間取值。

發動機的功率即是牽引力的功率，由 $P = Fv$ 可以看出，在功率一定的條件下，牽引力和運動速度成反比

注意事項

1. 注意區別衝量和功。衝量和功都是過程量，衝量反映的是力作用到物體上經過一段時間的累積；功反映的是力作用到物體上，通過一段位移的累積。衝量的效果是使物體的動量發生變化；功的效果是使物體能量發生變化。衝量是向量，功是標量。

2. 有些情況直接由力和位移來判斷力是否做功會有困難，此時可以由能量轉化的角度來進行判斷，若有能量的轉化則必有力做功。

3. 怎樣求變力做功：有兩類不同的力：一類是與勢能相關的力，比如重力、彈簧的彈力、浮力以及電場力等，它們的功與路徑無關，只與位移有關或者說只與始末點的位置有關，這類力對物體做正功，物體勢能減小，物體克服這類力做功，物體勢能增加，故可以由勢能的變化求此類力做的功。

另一類如滑動摩擦力、空氣阻力、非彈性形變的彈力等，在曲綫運動或往返運動時，這類力的功等于力和路程(不是位移)的積。變力做功也可以用動能定理或機械能守恒定律來求。

4. 機車以恒定功率起動和勻加速起動的區別。

a. 以恒定功率起動的運動過程是：變加速($a\downarrow$)⇒勻速($a=0$)，在此過程中，$F_{牽}$、v、a 的變化情況如下麵方框圖所示。

速度 $v\uparrow$ $F=\dfrac{P_{額}}{v}\downarrow$	⇒	$a=\dfrac{F\downarrow - f}{m}\downarrow$	⇒	$a=0$ 即 $F=f$ 時 v達到最大值v_m	⇒	保持v_m勻速

|←－－－ 變加速直線運動 －－－→|←－－－勻速直線運動 －－－－…

汽車達到最大速度時 $a=0$，此時 $F=f$，$P=F\cdot v_m=fv_m$。

b. 勻加速啓動的運動過程是：

勻加速($a=$ 恒量)⇒變加速($a\downarrow$)⇒勻速($a=0$)

在此過程中，P、F、v、a 的變化情況如下麵框圖所示。

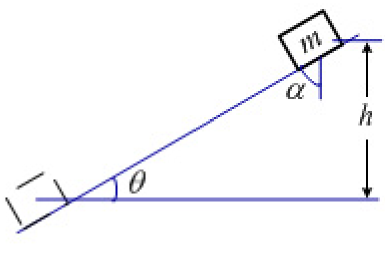
$a_{定}=\dfrac{F-f}{m}$ F為定值	⇒	$P=F_{定}v$, P隨 v增大而增大	⇒	$P_{額}=F\,v$時, $a=\dfrac{F_{定}-f}{m}\neq 0$ v還要增大	⇒	$F=\dfrac{P_{額}}{v\uparrow}\downarrow$ $a=\dfrac{F-f}{m}\downarrow$	⇒	$a=0$ 時,v達到 最大值v_m保持勻速

|←－－－勻加速直線運動 －－－→|←－－－－－ 變加速直線運動 －－－－－→|←勻速直線運動－…

例題驗證

例一

如圖所示，一質量爲 m 的物體，沿傾角爲 θ 的固定光滑斜面由靜止下滑，當它在豎直方向下落了 h 高度時，重力做功的即時功率及上述過程中重力做功的平均功率各爲多少?



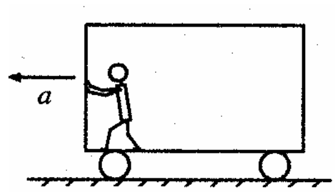
解答

瞬時功率 $P=Fv\cos\alpha=mgv\sin\theta=mg\sqrt{2gh}\sin\theta$

平均功率 $P=F\bar{v}\cos\alpha=mg\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{2gh}\right)\sin\theta=mg\dfrac{\sqrt{gh}}{2}\sin\theta$

例二

如圖所示，在勻加速向左運動的車廂中，一人用力向前推車廂，若人與車廂始終保持相對靜止，則下列結論正確的是



A.人對車廂做正功　　B.人對車廂做負功
C.人對車廂不做功　　D.無法確定

解答

人與車一起向左做勻加速運動，以人爲研究物件，人在水平方向受到車對人手的水平向右推力 F_1 和車對人腳的水平靜摩擦力 F_2，但 $F_1 < F_2$，所以車對人的合力做正功，則人對車廂做負功。答案 B

例三

一輛質量爲 2000kg 的汽車，發動機的額定功率爲 80kW。它在平直公路上行駛時所受阻力恒爲車重的 0.2 倍。現在這輛汽車由靜止開始，以 2m/s^2 的加速度勻加速啓動，那麼請計算：

(1) 這個勻加速過程持續了多長時間；
(2) 勻加速過程所能達到的最大速度；
(3) 汽車最終可達到的最大速度；
(4) 第 3s 末汽車的實際功率。

解析

解決本題的關鍵是瞭解機動車輛運動的階段性特點，區分好實際功率和額定功率。

由 $F - kmg = ma$，

有 $\dfrac{P}{v} - kmg = ma$，$\dfrac{P_{額}}{v_1} - kmg = ma,\quad v_1 = \underline{\underline{10\text{ m/s}}},\ \ t = \dfrac{v_1}{a} = \underline{\underline{5\text{ s}}}$

由 $\dfrac{P}{v} - kmg = ma, a = 0$，

有 $\dfrac{P_{額}}{v_2} = kmg,\quad v_1 = \underline{\underline{20\text{ m/s}}}$

當 $t = 3\text{s}$ 時，$v = at, P = Fv = \underline{\underline{48\text{ kW}}}$

5.2 機械能和動能定理

基本概念和理論

(1) 動能：物體由於運動而具有的能量叫做動能。

公式：$E_\text{k} = \dfrac{1}{2}mv^2$。　　(5.2)

單位：國際單位制動能單位爲焦耳(J)。

動能是一個描述物體運動狀態的物理量。要注意動能與動量的區別：動能是標量，動量是向量，動能的變化是做功的結果，動量的變化是衝量作用的結果，動能與動量大小之間的關係是：$E_k = \dfrac{p^2}{2m}, p = \sqrt{2mE_k}$。

(2) 動能定理：外力對物體所做的總功等於物體動能的變化，這個結論叫動能定理。

公式：$W_{合} = E_{k2} - E_{k1}$。

動能定理適用於單個物體，外力對物體做的總功即合外力對物體所做的功，亦即各個外力對物體做功的代數和，物體動能的變化量指的是物體末動能與初動能之差。應用動能定理解題的基本步驟：

(a) 選取研究物件，明確它的運動過程。

(b) 分析研究物件的受力情況和各力做功情況。

(c) 明確物體在過程的始末狀態的動能。

(d) 列出動能定理運算式，及其他有關方程，進行求解。

對恒力作用下的勻變速直綫運動，凡不涉及加速度和時間的，用動能定理求解，一般比用牛頓定律和運動學方法更簡便。用動能定理還能解決一些用牛頓定律和運動學方法難以解決的問題，如變力作用的過程，曲綫運動問題等。

(3) 勢能

(a) 由物體間的相互作用和物體間的相對位置決定的能量叫做勢能，如重力勢能、彈性勢能、分子勢能、電勢能等，勢能也叫位能。

(b) 重力勢能：物體由於被舉高而具有的能量叫做重力勢能，是物體和地球共有的一種能量，是由物體和地球間的相對位置決定的。

公式：$E_p = mgh$，重力勢能是標量。

單位：在國際單位制中是焦耳(J)。

重力勢能是相對的，$E\mathrm{p} = mgh$ 中的 h 是物體的重心到參考平面(零重力勢能面)的高度，若物體在參考面以上，則重力勢能爲正，若物體在參考平面以下，則重力勢能取負值，而重力勢能的變化量與零重力勢能面的選取無關。

重力勢能的變化與重力做功有關：重力對物體做多少正功，物體的重力勢能就減少多少，重力對物體做多少負功，物體的重力勢能就增加多少重力對物體所做的功，等於物體重力勢能變化量的負值，即

$$W_G = -(E_{p2} - E_{p1}) = \mathrm{E}_{p1} - E_{p2} \quad (5.3)$$

重力做功的特點是：重力所做的功只跟初位置的高度 h_1 和末位置的高度 h_2 有關，跟物體運動的路徑無關。

(c) 彈性勢能：發生彈性形變的物體，在恢復原狀時能夠對外界做功，因而具有能量，這種能量叫做彈性勢能

$$\Delta E = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) \qquad (5.4)$$

其中 k 是彈性係數，$x_{1,} x_2$ 是位移。

(4) 機械能：動能和勢能(重力勢能和彈性勢能)統稱爲機械能。

<u>注意事項</u>

(1) 用動能定理求變力做功：

在某些問題中由於力 F 大小或方向的變化，不能由公式 $W = Fs\ \cos\alpha$ 求出力 F 所做的功，此時可以由其做功的結果，即動能的變化量來求變力 F 所做的功。

(2) 應用動能定理解題時，如果物體在某個運動過程中包含有幾個運動性質不同的分過程(如加速、勻速或減速)，此時可以分段考慮也可對全程考慮。若能對全過程列式，則可使問題簡化，在把各個力做的功代入公式

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_n = \frac{1}{2}mv_t^{\ 2} - \frac{1}{2}mv_0^{\ 2} \qquad (5.5)$$

時，要把它們的數值連同符號代入，解題時要分清各過程中各力做功的情況。

例題驗證

例四

從 10m 高處以 10m/s 初速度平拋質量爲 200g 的物塊，求：
(1)不計空氣阻力，物塊落地的速度多大；
(2)若空氣阻力不可忽略，物塊落地速度爲 15m/s，則物塊克服阻力做了多少功。

解析與答案

解决本題的關鍵是靈活進行能量分析，把握機械能守恒定律適用的條件，準確認識功是能量轉化的量度這一基本觀點。

(1) $mgh = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^{\ 2},\ v = \underline{17.3\ \text{m/s}}$

(2) 解法 1

$$W_G - W_f = \frac{1}{2}mv_2^{\ 2} - \frac{1}{2}mv_0^{\ 2},\ mgh - W_f = \frac{1}{2}mv_2^{\ 2} - \frac{1}{2}mv_0^{\ 2},\ W_f = \underline{\underline{7.1\ \text{J}}}$$

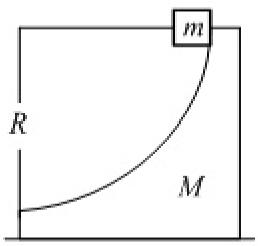
解法 2

$$W_f = mgh - \frac{1}{2}mv_2^{\ 2} + \frac{1}{2}mv_0^{\ 2} = \underline{\underline{7.1\ \text{J}}}$$

5.3 綜合例題

例題一

如圖所示，質量爲 m 的小物塊從靜止於 $\frac{1}{4}$ 光滑水平面上質量爲 M 且帶有半徑爲 R 的光滑軌道的大物塊頂端無初速度下滑，求小物塊從被釋放到滑到大物塊底端(切線水平)的過程中彈力對其做的功。



解析

在 m 與 M 作用過程中，M 要後退，所以 F_N 的方向與 m 的運動方向不垂直，F_N 要對 m 做功，F_N 的大小、方向都變化，是個變化的力。雖然 F_N 變化複雜，但整個過程滿足兩條規律，即:m，M 與地球組成的系統機械能守恒，m 與 M 組成的系統水平方向動量守恒，再加上對 m 用動能定理，可解出這個變力的功。

設 m 滑到底端的速度大小爲 v，且 M 的反沖速度大小爲 V ，則

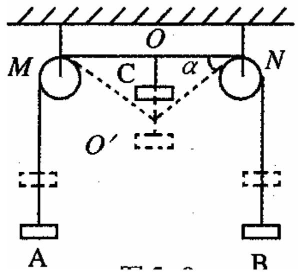
$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

$$mv = MV$$

$$W_N + mgR = \frac{1}{2}mv^2$$

解得 $\underline{\underline{W_N = -\frac{m}{m+M}mgR}}$ 。

<u>例題二</u>



如圖所示，重物 A、B 、C 質量相等，A、B 用細繩繞過兩個定滑輪相連接，開始時 A、B 靜止，滑輪間細繩 MN 長 0.6m。現將 C 物體輕輕挂在 MN 繩的中點，求：

(1) C 下落多大高度時速度最大?

(2) C 下落的最大距離?

<u>解析與答案</u>

此題是運用機械能守恒定律研究多個物體構成的系統問題。應用時應認真分析每個物體的受力情况和力的做功情況，幷分淸機械能在系統中各物體之間的轉移，可以根據 $E_{增}=E_{減}$(即一個物體機械能增加量等於另一個物體機械能減少量)列方程求解。本題第(2)問的最後關係式體現了 C 的重力勢能的減少量等於 A、B 兩物體重力勢能的增大量。可按以下步驟求解。

(1) A、B 、C 三個物體運動過程均是先加速後減速，C 速度最大時，三物體所受合力爲零.此時 O' 點合力爲零。依題意三個物體質量相等，故 $\alpha = 30^0$，則 C 下落的高度爲

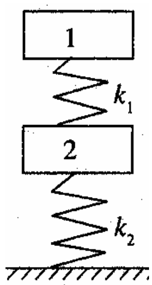
$$h = \frac{0.6}{2} \times \tan 30^0 = \underline{0.17\ \text{m}}$$

(2) 當C下落到最低點時，A、B也達到最高點，此時，三者速度爲零。

設 C 下落的最大高度爲 H，則 A、B 上升的高度爲 $\sqrt{h^2 + 0.3^2} - 0.3$ 。A、B、C 組成的系統只有重力做功，系統機械能守恒。

$$mgH = 2mg(\sqrt{h^2 + 0.3^2} - 0.3)\ ,\ H = \underline{0.4\text{m}}$$

<u>例題三</u>



如圖所示，勁度係數爲 k_1 的輕質彈簧分別與質量爲 m_1、m_2 的物塊 1、2 栓接，勁度係數爲 k_2 的輕質彈簧上端與物塊 2 拴接，下端壓在桌面上(不拴接)，整個系統一處于平衡狀態。現施力將物塊 1 緩慢地豎直上提，直到下面彈簧的下端剛脫離桌面。求在此過程中，物塊 2 和的重力勢能的增加。

<u>解析與答案</u>

本題考查對物理情境的分析能力。要根據題意分析連接物體的初、未狀態，弄清楚其狀態變化的過程，及其位置的變化。同時能綜合分析其不同狀態的平衡條件，即可得出正確結論。

初始狀態下，彈簧平衡。

以 m_2 爲研究對象，有 $k_2x_2=(m_1+m_2)g,\quad x_2=\dfrac{(m_1+m_2)g}{k_2}$

以 m_1 爲研究對象，有 $k_1x_1=m_1g,\quad x_1=\dfrac{m_1g}{k_1}$

末狀態下，彈簧達到新的平衡狀態。

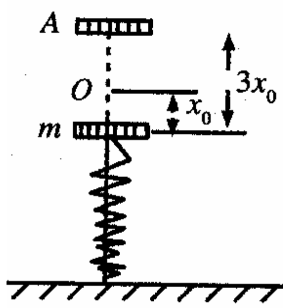
彈簧 1 的伸長量 $x_1'=\dfrac{m_1g}{k_1}$ 。由上述關係可知：

物塊2的重力勢能增加了 $m_2gx_2=m_2g\dfrac{(m_1+m_2)g}{k_2}=\underline{\underline{m_2(m_1+m_2)g^2\dfrac{1}{k_2}}}$

物塊 1 的重力勢能增加了 $m_1g(x_1+x_1'+x_2)=\underline{\underline{m_1(m_1+m_2)g^2\left(\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}\right)}}$

<u>例題四</u>

質量爲 m 的鋼板與直立輕彈簧的上端連接，彈簧下端固定在地上，平衡時，彈簧的壓縮量爲 x_0，如圖所示。一物塊從鋼板正上方距離爲 $3x_0$ 的 A 處自由落下，打在鋼板上並立即與鋼板一起向下運動，但不粘連，它們到達最低點後又向上運動。已知物塊質量也爲 m 時，它們恰能回到 O 點。若物塊質量爲 $2m$，仍從 A 處自由落下，則物塊與鋼板回到 O 點時，還具有向上的速度，求物塊向上運動到達的最高點與 O 點的距離。



<u>解析與答案</u>

本題考查了機械能守恒定律和動量守恒定律的綜合知識，考查綜合分析及推理能力。特別是通過對物理過程的分析，巧妙地推出彈性勢能的大小，符合競賽大綱對彈性勢能的數學要求。解題時要認真分析物理過程，建立正確表達物理規律的方程。

由自由落體公式解得物塊與鋼板碰前的速度 $v_1=\sqrt{2gh}=\sqrt{6gx_0}$ ，物塊與鋼板碰撞瞬間動量守恒，碰後的共同速度 $v_2=\dfrac{1}{2}v_1=\sqrt{\dfrac{3gx_0}{2}}$ 。

物塊與鋼板壓縮彈簧再上升到 O 點的過程機械能守恒，設開始時彈簧的彈性勢能爲 E_p，選 O 點爲零勢能面。則 $E_p-2mgx_0+\dfrac{1}{2}(2m){v_2}^2=0$ ，解得 $E_p=\dfrac{1}{2}mgx_0$

質量爲 $2m$ 的物塊下落到鋼板處與鋼板碰前速度仍是 $v_1=\sqrt{6gx_0}$ ，與鋼板碰撞滿足動量守恒，設碰後共同速度爲 v_2' ，則有 $2mv_1=3mv_2'$，解得 $v_2'=\dfrac{2}{3}v_1=\sqrt{\dfrac{8gx_0}{3}}$ 。

質量爲 $2m$ 的物塊與鋼板一起壓縮彈簧再回到 O 點的過程機械能守恒。設回到 O 點速度爲 v_3，選 O 點爲零勢能面，則 $E_p-3mgx_0+\dfrac{1}{2}(3m){v_2}'^2=\dfrac{1}{2}(3m){v_3}^2$，解得 $v_3=\sqrt{gx_0}$ 。

質量爲 $2m$ 的物塊從 O 點開始以 v_3 做豎直上拋運動，上升的最大高度爲 $h=\frac{{v_3}^2}{2g}=\underline{\underline{\frac{x_0}{2}}}$ 。

第六章 力學中的守恆問題

自然界千變萬化，但是人們發現有些物理量在一定的條件下是守恒的，如機械能、動量、質心、電荷、…等，而且某些守恒定律的適用範圍更廣泛，如能量守恒定律。所以物理學中尋求這些「守恒物理量」已成爲物理學研究工作的一個重要方面。利用物理量的守恆定律也是解決物理問題的一個重要方法。

下面小結幾個大家熟悉的力學中的守恒定律，幷附例題說明。

6.1 機械能守恆定律

基本概念和理論

(1) 能量守恆定律

a. 能量不會消失，亦不會無中生有。

b. 能量可由一種形式轉換爲另一種形式，但能量的總和不變。

(2) 機械能守恆定律

在只有重力(和/或彈簧的彈力)做功的情況下，物體的動能和重力勢能發生相互轉化，但機械能的總量保持不變。

一般表達式：$E_1=E_2$ 或 $E_{k1}+E_{p1}=E_{k2}+E_{p2}$；

公式變形後可得 $\Delta E_k=-\Delta E_p$ 或 $\Delta E_k+\Delta E_p=0$。

(3) 機械能守恒的方法一般有兩種：

對某一物體，若只有重力(或彈簧的彈力)做功，其它力不做功(或其他力做功的代數和爲零)，則該物體的機械能守恒。

對某一系統，物體間只有動能和重力勢能及彈性勢能相互轉化，系統跟外界沒有發生機械能的傳遞，機械能也沒有轉變成其它形式的能(如內能)則該系統的機械能守恒。

(4) 應用機械能守恒定律解題的基本步驟：

第一步：根據題意，選取研究對象(物體或系統)；

第二步：明確研究對象在過程中的受力情況，弄淸各力做功情況，判斷是否符合機械能守恒的條件；

第三步： 恰當地選取參考面，確定研究對象在過程的始末的機械能(包括動能、重力勢能)；

注意事項

1. 功是能量轉化的量度，其含意是：做了多少功就有多少能量轉化，反之轉化了多少能量說明做了多少功，這實際是能量守恒的另一種表達。

由功能關係可以得出：重力和彈力之外的力對物體做的功，等於物體的機械能的增量。

$$\sum W=E_2-E_1=\Delta E,\text{ 或 } W_{動力}+W_{阻力}=E_2-E_1,$$

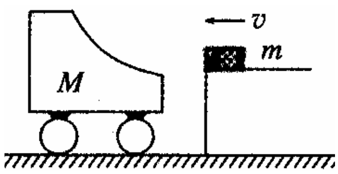
即 $Fs-fs=(\frac{1}{2}mv_2{}^2+mgh_2)-(\frac{1}{2}mv_1{}^2+mgh_1)$

物體系統機械能的變化量，只與做功過程中物體系統所處的始末狀態有關，與中間的變化過程無關，因此運用功能關係和機械能守恒定律來解決一些問題，可以避免直接用牛頓第二定律求加速度解題的困難。

2. 系統克服摩擦力所作的總功等于系統機械能的減少量，這部分機械能就轉變爲系統的內能，這就是“摩擦生熱”，由此可得出結論：作用與系統的滑動摩擦力和系統內物體間相對滑動的位移的乘積，在數值上等于系統內能的增量，即$Q = f_{滑} \times s_{相對}$，靜摩擦力即使對物題做功，由於相對位移爲零，因而沒有內能產生。

例題驗證

例一



在光滑的水平地面上放有一質量爲 M 帶光滑弧形槽的小車，一個質量爲 m 的小鐵塊以速度 v 沿水平槽口滑去，如圖所示。求
(1) 鐵塊能滑至弧形槽內的最大高度 H。(設 m 不會從小車 M 左端滑出)
(2) 小車的最大速度 v_2.

解析與答案

(1) m 滑至最高處時，與 M 有共同速度，等效于非彈性碰撞，即可有動量守恒得
$mv = (m + M)v'$，

m 在光滑槽上滑過程中，機械能守恆 $\frac{1}{2}mv^2 = mgH + \frac{1}{2}(m + M)v'^2$，

解出 $H = \dfrac{Mv^2}{2g(m + M)}$。

(2) 當 m 沿弧槽返回時，M 仍在加速運動，當 m 從右端脫離小車時，M 速度最大。由動量守恆和動能守恆可得

$$mv = mv_1 + Mv_2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^{\ 2} + \frac{1}{2}Mv_2^{\ 2}$$

由上兩式得 $v_1 = \dfrac{m - M}{m + M}v, \quad v_2 = \dfrac{2m}{m + M}v$。

6.2 動量守恆定律

基本概念和理論

相互作用的物體，如果不受外力作用，或者它們所受的外力之和爲零，它們的總動量保持不變，這個結論稱爲動量守恆定律。表達式：

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \text{，或者 } p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \text{，} p = p'\text{。}$$

注意事項

1. 動量守恒定律是自然界中最重要、最普遍的規律之一，它是一個實驗定律，可以從動量定理和牛頓第三定律導出，也可以認爲它是動量定理的一個特例。

2. 動量守恆定律的適用條件：

a. 系統不受外力或系統所受外力的合力爲零。

b. 系統所受的外力的合力雖不爲零，但比系統內力小得多，如碰撞問題中的摩擦力，爆炸過程中的重力等外力比起相互作用的內力來小得多，可以忽略不計

c. 系統所受外力的合力雖不爲零，但在某個方向上的：分量爲零，則在該方向上系統的總動量的分量保持不變。

3. 動量守恆定律的適用範圍

a. 動量守恒定律比牛頓運動定律的適用範圍廣泛的多，只要系統不受外力或所受合外力爲零，那麽系統內部各物體的相王作用，不論是萬有引力、彈力、摩擦力，還是電力、磁力，動量守恒定律都適用。

b. 系統內各物體相互作用時，不論是否接觸，相互作二用後不論是否粘在一起，還是分裂成碎塊，動量守恒定律都適用，從大到星系的宏觀系統，到小到原子、基本粒子的微觀系統，以及解決低速物體的運動問題或處理接近光速的運動，動量守恆定律都適用。

c. 參照系的選取： 計算動量時，系統內各物體的速度必須是相對同一慣性參照系的速度。一般以地面爲參照系進行計算。

例題驗證

例二

靜水中停著一隻質量爲 M 的船，船尾一人從靜止開始以相對於船的速度 v_1 走向船頭，人的質量爲 m，求船對水的速度。

解析與答案

此題應以靜水爲參照系，設人和船相對于水的速度分別爲 v_2和 v_3，規定人的前進方向爲正方向，則 v_2爲正，v_3爲待求量先取正，故有 $mv_2 + Mv_3 = 0$。

$\because v_2 = v_1 + v_3$, $\therefore v_3 = -\dfrac{mv_1}{m+M}$ ， v_3與規定的正方向相反。此題爲典型的人船模型。

本題若取 v_3 爲負，則 $mv_2 - Mv_3 = 0$ ， $\because v_2 = v_1 - v_3$, $\therefore v_3 = \dfrac{mv_1}{m+M}$ ，這樣，v_3已取負值，所以解爲絕對值，兩種解法一致。答案爲 $\dfrac{mv_1}{m+M}$ 。

本題如果列出動量守恒方程爲 $mv_1 + Mv_3 = 0$ ，就犯了未取同一慣性參照系的錯誤。

例三

質量爲 $m_1 = 0.1\,\text{kg}$ 的小球甲在光滑的水平桌面上以 $v_1 = 30\text{m/s}$ 的速率向右運動，恰好遇上質量爲 $m_2 = 0.5\text{kg}$、以 $v_2 = 10\text{m/s}$ 的速率向左運動的小球乙，碰撞後，小球甲以原速率被反向彈回，求碰撞後小球乙的速度的大小和方向。

解答 本題是動量守恆定律的直接應用，兩個物體的初速度方向不同，可以通過規定正方向，由正、負號表示速度方向，以 v_1的方向即向右爲正，則各速度表示爲

$$v_1 = 30\text{m/s}，v'_2 = -10\text{m/s}，v'_1 = -30\text{m/s}。$$

由動量守恆

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 v'_1}{m_2} = 2\ \text{m/s}$$

速度大小爲 2 m/s，方向水平向右。

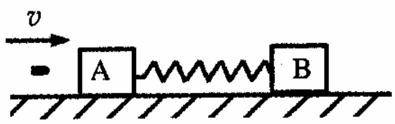
6.3 兩個守恆定律的比較

基本概念和理論

動量守恆定律和機械能守恆定律所研究的對象都是相互作用的物體組成的系統，並且研究的都是某一個物理過程，但兩者守恆的條件不同：系統動量守恒決定于系統所受合外力是否爲零；而機械能守恆則決定於是否有重力以外的力(不管是內力還是外力)做功。

所以在利用機械能守恆定律處理問題時要著重分析力的做功情況，看是否有重力以外的力做功；在利用動量守恆定律處理問題時，看重分析系統的受力情況(不管是否做功)，幷著重分析是否滿足合外力爲零。

應注意事項：系統動量守恒時，機械能不一定守恆；同樣機械能守恒的系統.動量不一定守恆,這是因爲兩個守恆定律的守恆條件不同的必然結果。



如圖所示在光滑水平面上，木塊 A、B 用輕彈簧連在一起，當一顆子彈水平射入木塊 A 幷留在 A 中時，對子彈、木塊 A 和 B 及彈簧組成的系統，分析動量和機械能是否守恆，就要根據兩守恆定律各自成立的條件來分析：因子彈打入木塊過程中有滑動摩擦力做功，因而子彈一部分機械能轉化成系統內能，則系統機械能減少，因此系統機械能不守恒；而系統在過程中水平方向不受外力，因此動量守因此動量守恒。 又如各種爆炸、碰撞、反沖現象中，因 $F_{內} >> F_{外}$，動量都是守恒的，但因很多情況中有內力做功，使其它形式的能轉化爲機械能而使系統機械能不守恒。

此外，動量守恒定律表示爲向量式，應用時必須注意方向，且可在某一方向單獨使用；機械能守恒定律表示爲標量式，對功或能量均爲代數和，不能按向量方法進行分解或合成。

6.4 質心守恆定律

基本概念和理論

(1) 質心運動問題

質心是物體的質量中心，由質量爲 m_1、m_2、……的幾個質點組成的質點系，若這幾個質點所在的位置分別是(x_1， y_1)、(x_2， y_2)、……，則系統的質心 C 位置(x_C， y_C)爲

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \ ;$$

例如由質量爲 m_1 及 m_2 而所在的位置是(x_1， y_1)及(x_2， y_2)的兩個質點組成的系統的質心 C 位置爲

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \ 。$$

(2) 質心守恆定律

表述：若系統在某方向上沒有受到外力作用，則質心 $C(x_c, y_c)$位置在該方向沒有改變。

例題驗證

例六

如圖所示，AB 爲一光滑水平橫杆，杆上套一質量爲 M 的小圓環，環上系一長爲 L 質量不計的細繩，繩的另一端撿一質量爲 m 小球。現將繩拉直，且與 AB 平行，由靜止釋放小球，則當細繩與 AB 成 θ 角時，圓環移動的距離 s_2 是多少?

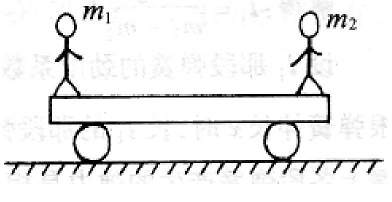
解答

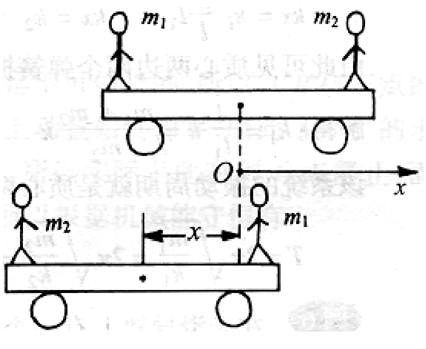
先正確畫出位移關係圖。解決該題的主要依據是：(a)系統總動量之和爲零。(b)系統只在水平方向動量守恒，即 $0 = mv_1 - Mv_2$。需注意的是：明確系統中兩個相互作用的物體對地水平位移大小的關係即 $s_1 + s_2 + L\cos\theta = L$ 。

由上述兩式及位移與速度的關係可得出 $\frac{s_1}{s_2} = \frac{M}{m}$ ，進一步求出 $s_2 = \frac{mL(1-\cos\theta)}{M+m}$ 。

例四

一質量爲 M 的平板小車停在光滑的水平地面上，如圖所示，車板長度爲 $2l$。在車的左、右兩端分別站立著質量爲 m_1 和 m_2 的兩個人($m_1 > m_2$)。現兩人分別向對方位置走去，當他們交換位置後，車身移動的距離 x 爲多少?





解析與答案

如圖所示，以兩個人和平板小車爲系統，由于地面光滑，系統沒有受到水平外力，所以兩人互相交換位置時，質心位置沒有變化。取開始位置平板小車中點爲座標原點，則有 $x_c = x'_c$， x_c 和 x'_c 分別爲兩個人交換位置前後系統質心的座標。

由于系統受到的合外力爲零，據質心運動定律 $F = ma_c$，可知 $a_c = 0$，而系統原來靜止，故質心位置不變。即 $\dfrac{m_1(-l) + m_2 l}{M + m_1 + m_2} = \dfrac{M(-x) + m_2(-l-x) + m_1(l-x)}{M + m_1 + m_2}$ 。

解得車身移動的距離 $\underline{\underline{x = 2l \times \dfrac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2}}}$ 。

6.5 綜合例題

例題一

質量 $m_1 = 4\text{kg}$ 及 $m_2 = 1\text{kg}$ 兩球，以 $u_1 = 1\text{ms}^{-1}$ 及 $u_2 = 2\text{ms}^{-1}$ 的速率迎面相撞，碰撞後兩球仍沿原直綫運動。求兩球碰撞後各自速度。

(1) 完全彈性碰撞；

(2) 在碰撞過程中損失了 25%的機械能。

解析與答案

(1) 由動量守恆定律 $m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$，

由機械能守恆定律 $\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$；

以 $m_1 = 4\text{kg}$， $m_2 = 1\text{kg}$， $u_1 = 1\text{ms}^{-1}$ 及 $u_2 = -2\text{ms}^{-1}$ 代入以上兩式， 得到

$v_1 = \underline{-0.2\ \text{ms}^{-1}}$， $v_2 = \underline{2.8\ \text{ms}^{-1}}$。

(2) 由動量守恆定律 $m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$，

由能量守恆定律 $\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$+機械能損失(內能， 聲， 光等)，

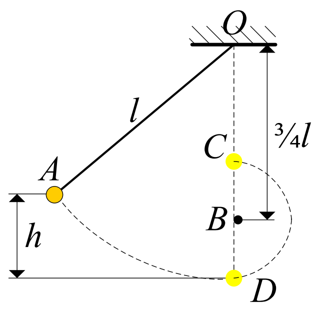
即 $(1-25\%)\cdot\left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\right) = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$；

以 $m_1 = 4\text{kg}$， $m_2 = 1\text{kg}$， $u_1 = 1\text{ms}^{-1}$ 及 $u_2 = -2\text{ms}^{-1}$ 代入， 得到

$v_1 = \underline{-0.110\ \text{ms}^{-1}}$， $v_2 = \underline{2.44\ \text{ms}^{-1}}$。

例題二

A 爲用輕綫吊挂在 O 處的一個擺球，擺綫長爲 l。在 O 點正下方 $\frac{3}{4}l$ 處有一釘子 B。現將擺球向左拉開到某一初始高度 h，然後放手，當擺到竪直位置再向右擺時，釘子就擋住擺綫，結果只有釘子以下部分可繼續向右擺。設擺球作圓周運動的過程中擺綫始終處于拉直狀態。



(1) 若擺球初始高度 $h = l$ (擺線水平位置)，試求擺球繞過釘子的正上方 C 時 (i) 擺球的速度 v ； 和 (ii) 擺線的張力 T。

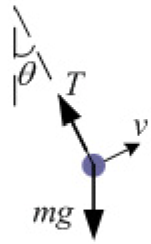
(2) 若擺球初始高度 $h < l$，試求擺球可繞過釘子 B 的正上方 C 時

(i) 擺球所須的最小速度 v ； 和 (ii) 初高度 h 的最小値。

(結果以參量 l， g 表示)

解析與答案

(1) (i) 取擺球繞過釘子作圓周運動的最高點 (釘子的正上方 C) 爲重力勢能零點，則小球從 A 擺動到 C 的過程中機械能守恆，有 $\frac{1}{2}mv^2 = mg\frac{l}{2}$。



$\therefore$ 擺球的速度 $\underline{v = \sqrt{gl}}$。

(ii) 如圖所示，向心力 $m\frac{v^2}{R} = T - mg\cos\theta$， 在 C 點 $\theta = 180^0$， $R = \frac{l}{4}$。

$\therefore$ 擺線的張力 $T = m\frac{gl}{l/4} + mg\cos 180^0 = \underline{3\,mg}$。

(2) (i) 向心力 $m\frac{v^2}{R} = T - mg\cos\theta$， 只要 $T = 0$ 時擺球就可繞過 C 點，此時

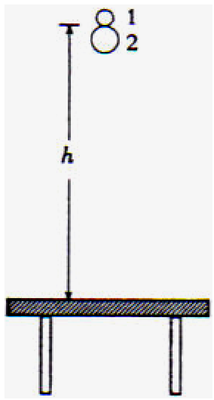
$m\frac{v^2}{l/4} = -mg\cos 180^0$， 即 $v^2 = \frac{gl}{4}$， $\therefore\ \underline{v = \frac{\sqrt{gl}}{2}}$。

(ii) 取點 C 爲重力勢能零點，則小球從 A 擺動到 C 的過程中機械能守恆，有

$mg\left(h - \frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2}mv^2$， 即 $h = \frac{l}{2} + \frac{v^2}{2g} = \frac{l}{2} + \frac{1}{2g}\cdot\frac{gl}{4} = \underline{\frac{5}{8}l}$。

例題三 (2006 香港物理奧林匹克開放題 4)

兩個硬彈性小球，兩球連心綫處于竪直位置，兩球幾乎接觸，從高度 H_0 自由落下。設小球(質量爲 $M = 10m$) 與地的碰撞以及緊接著它與上球(質量爲 m)的碰撞都是瞬間的彈性碰撞。求上球回升的最大高度。



解析與答案

落到地面時兩球的速度大小 $v = \sqrt{2gH_0}$ 而方向向下， (i)

下球以速度 v 同地面發生彈性碰撞後，大小不變但方向改變，
下球向上以速度 v 同上球發生彈性碰撞。

由動量守恆定律 $-m_1 v + m_2 v = m_1 v_1 + m_2 v_2$， (ii)

由機械能守恆定律 $\frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 = \frac{1}{2}m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_2}^2$，(iii)

由(ii)、(iii)式，解得 $v_1 = \frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v,\quad v_2 = \frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2}v$。 (iv)

以 $M = 10m$ 帶入(iv)式，得 $v_1 = \frac{29}{11}v,\quad v_2 = \frac{7}{11}v$

上球回升的高度 $H = \frac{{v_1}^2}{2g} = \left(\frac{29}{11}\right)^2\frac{v^2}{2g}$，且由(i)式 $H_0 = \frac{v^2}{2g}$，

于是 $H = \left(\frac{29}{11}\right)^2 H_0 \approx \underline{\underline{6.95H_0}}$。

討論

取 $k=\dfrac{m_2}{m_1}$，式(iv)變爲 $v_1=\dfrac{3k-1}{k+1}v=\dfrac{3-\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}}v,\quad v_2=\dfrac{1-3k}{k+1}v=\dfrac{1-\frac{3}{k}}{1+\frac{1}{k}}v$，

則 $3\le k<\infty,\quad 2v\le v_1<3v, 0\le v_2<2v,\quad 4H_0\le H<9H_0$ 成立。

例題四 (第一屆泛珠三角物理奧林匹克力學基礎試競賽題 2)

兩個具有相同質量 m 的橡膠球碰撞後，仍沿原直綫運動。

(a) 兩橡膠球以相同速率 v 迎頭相撞後反彈，且在碰撞過程中損失了 36%的動能。求球反彈的速度。

(b) 一橡膠球以速率 v 撞向另一靜止橡膠球。求碰撞後

(i) 兩球各自速度，和 (ii) 總共損失的動能。

注意：只有當兩球以相同速率迎頭相撞時，碰撞過程中損失的動能才是原來的 36%。

解析與答案

(a) 設碰撞後兩球速度爲 u_1， u_2。

由動量守恆定律，

$$mv+(-mv)=mu_1+mu_2$$

$$\therefore\quad u_1=-u_2=u$$

由能量守恆定律，

$$\tfrac{1}{2}mv^2+\tfrac{1}{2}m(-v)^2=\tfrac{1}{2}mu^2+\tfrac{1}{2}m(-u)^2+\text{動能損失}(36\%)$$

$$(1-36\%)\left(\tfrac{1}{2}mv^2+\tfrac{1}{2}m(-v)^2\right)=\tfrac{1}{2}mu^2+\tfrac{1}{2}m(-u)^2$$

$\therefore$ 兩球反彈的速度 $u=0.8\,v$。

(b) (i) 一橡膠球以速率 v 撞向另一靜止橡膠球，即碰撞前兩球系統的質量中心以 $0.5v$ 的速度移動，且碰撞後亦如此，因碰撞僅涉及兩球間的內力，幷無外力作用于系統上。

在質心相對參考系中，質心靜止，兩球則以 $v-0.5v=0.5v$， 及 $0-0.5v=-0.5v$ 的速度迎頭相撞，且在碰撞過程中損失了 36% 的動能。

由題(1)， 兩球反彈的速度 $\pm0.4\,v$ (在質心相對參考系中)。

那麼，兩球各自速度 ＝ $0.5\,v\pm0.4\,v$ ＝ $0.9\,v$ 及 $0.1\,v$。

(ii) 系統碰撞前的動能＝$\dfrac{1}{2}mv^2$，

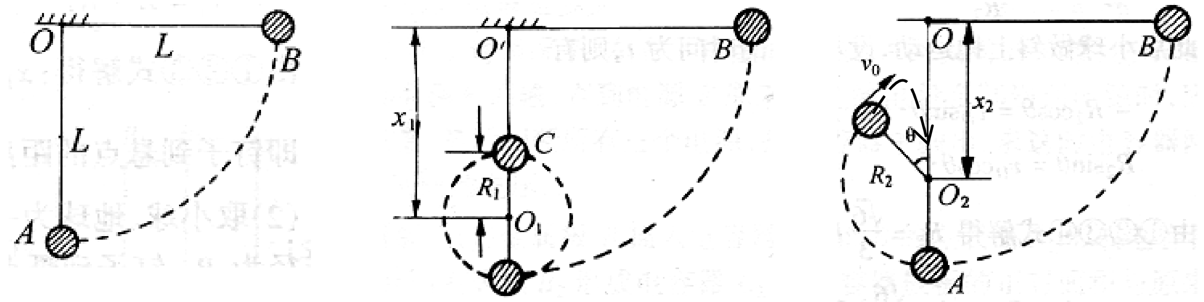
碰撞後的動能＝$\tfrac{1}{2}m(0.9v)^2+\tfrac{1}{2}m(0.1v)^2=0.82\times\tfrac{1}{2}mv^2=(1-18\%)\times$系統碰撞前的動能 ，

$\therefore$ 在碰撞過程中損失了 18% 的動能。

例題五 (第一屆泛珠三角物理奧林匹克力學基礎試競賽題 5)

如圖所示，長爲 L 的細繩上端固定在天花板上靠近墻壁的 O 點，下端系一質量爲 m 的小球豎直懸挂起來，A 點是平衡時小球的位置，保持繩繃直。將小球從 A 點拉開到繩水平的位置 B，然後在 OA 連線上於牆上固定一細長的釘子於某點。

當擺到豎直位置再向左擺時，釘子就擋住擺綫，結果只有釘子以下部分可繼續向左擺。設擺球作圓周運動的過程中擺綫始終處于拉直狀態。



圖(a)　　　　　　圖(b)

問下列兩種情況下，釘子到懸點 O 的距離 x_1 和 x_2 各是多少？

(a) 將球釋放後，繩被釘子 O_1 擋住，擺球以 O_1 爲圓心做圓周運動，幷可繞過釘子的正上方 C 點，如圖(a)所示。

(b) 將球釋放後，繩被釘子 O_2 擋住後，小球以 O_2 爲圓心做圓周運動，幷在 D 點作斜上拋運動，剛好能擊中釘子 O_2，如圖(b)所示。

解析與答案

(a) 取擺球繞過釘子作圓周運動的最高點 (釘子的正上方 C) 爲重力勢能零點，則小球從 B 擺動到 C 的過程中機械能守恆，有

$$mg\left(L-2R_1\right)=\frac{1}{2}mv_C{}^2 \quad , \quad v_C{}^2=2g\left(L-2R_1\right) \quad ;$$

(1)

向心力 $m\dfrac{v^2}{R}=T-mg\cos\theta$， 當

張力 $T=m\dfrac{v^2}{R}+mg\cos\theta\geq 0$ 時擺球就可繞過 C 點，此時 θ=180^0， 則

$$v_C{}^2-gR_1\geq 0 \text{ ，} \qquad (2)$$

由(1)和(2)解得　$R_1\leq\dfrac{2}{5}L$ ，　$\therefore x_1=L-R_1\geq\underline{\underline{\dfrac{3}{5}L}}$

(b) 取點 D 爲重力勢能零點，則小球從 B 擺動到 D 的過程中機械能守恆，有

$$mg\left(L-R_2-R_2\cos\theta\right)=\frac{1}{2}mv_D{}^2 \text{ ， 即}$$

$$v_D{}^2=2g\left(L-R_2-R_2\cos\theta\right) \text{ ；} \qquad (1)$$

向心力　$m\dfrac{v_D{}^2}{R_2}=T+mg\cos\theta,$ 其中 $T=0$　　　(2)

小球由 D 點作斜上拋運動擊中 O_2， 所用時間爲 t ， 則有

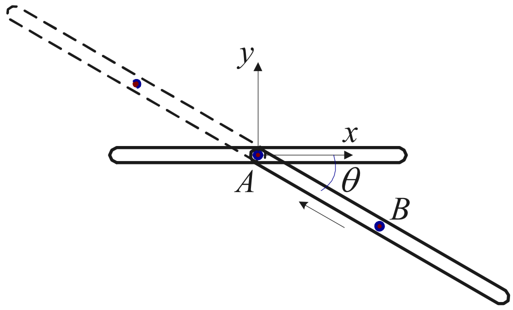
$$-R_2\cos\theta=v_D\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2 \text{ ，} \qquad (3)$$

$$R_2\sin\theta=v_D\cos\theta\cdot t \qquad (4)$$

由(1)， (2)， (3)和(4)， 解得 $R_2=\sqrt{\frac{2}{3}}L$， $x_2=L-R_2=\underline{\underline{\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)L}}$。

<u>例題六</u> (第一屆泛珠三角物理奧林匹克力學基礎試競賽題 1)

光滑平面上有兩條長度均爲 2 l、而質量分別爲 m_A 和 m_B 的均勻蠕蟲 A 和 B。它們的起始位置如圖中實線所示，蠕蟲 A 的質心位於 x-y 座標（0，0）。



(a) 試用參量 l， θ、m_A 和 m_B 分別表示蠕蟲質心 B 的座標和 A+B 系統質心的座標。

(b) 蠕蟲 B 開始慢慢從 A 身上爬過，爬時兩蟲的身體軸線始終保持夾角θ 。試分別寫出：當蠕蟲 B 如虛線所示爬過 A 後，兩蟲質心 A 和 B 位置的座標。

<u>解析與答案</u>

(a) 蠕蟲 B 爬行前 二蟲質心位置的座標：

$A(0，0)$， $B\left(\left(l\cos\theta,\quad -l\sin\theta\right)\right.$，

則系統質量中心 $C\left(\frac{m_B l\cos\theta}{M},\quad -\frac{m_B l\sin\theta}{M}\right)$，

其中 $M=m_A+m_B$。

(b) 蠕蟲 B 爬過 A 後 二蟲質心位置的座標：

$A(X，\ Y)$， $B\left(X-l\cos\theta,\quad Y+l\sin\theta\right)$，

則系統質量中心 $C\left(\frac{m_A X+m_B\left(X-l\cos\theta\right)}{M},\quad \frac{m_A Y+m_B\left(Y+l\sin\theta\right)}{M}\right)$。

由質心守恆定律(系統在水平面上沒有受到外力作用，質心在該面上的位置不會改變)，

$$\left(\frac{m_B l\cos\theta}{M},\quad -\frac{m_B l\sin\theta}{M}\right)=\left(\frac{m_A X+m_B\left(X-l\cos\theta\right)}{M},\quad \frac{m_A Y+m_B\left(Y+l\sin\theta\right)}{M}\right)$$

∴蠕蟲 B 爬過 A 後 二質心位置的座標爲

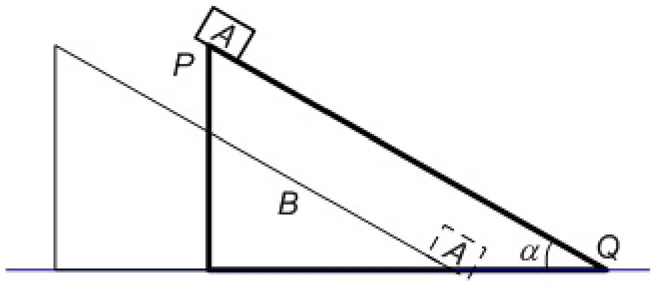
$$A(X,Y)=A\left(\frac{2m_B}{M}l\cos\theta,-\frac{2m_B}{M}l\sin\theta\right)$$

$$B\left(X-l\cos\theta,\quad Y+l\sin\theta\right)=B\left(-\frac{m_A-m_B}{M}l\cos\theta,\frac{m_A-m_B}{M}l\sin\theta\right)$$

例題七 (第二屆泛珠三角物理奧林匹克力學基礎試競賽題 5)

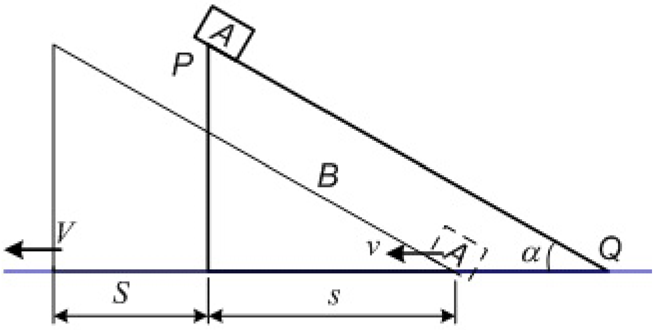
質量分別爲 m 和 M 的物體 A 和 B 置于光滑水平地面上，物體 A 在光滑斜面上 P 端自由滑下到 Q 端，設斜面長度 $PQ = L$ 。試求：物體 A (可視爲質點) 沿斜面滑下由 P 端到 Q 端，物體 B 的

(a)水平位移 S；(b)加速度 a；(c)所用時間 t 。



分析與解答

(a) 設水平向左爲正方向，物體 A 沿斜面滑下到 Q 端時，物體 A 和 B 相對地面的水平速度爲 v 和 V，以及水平位移爲 s 和 S 。



由動量守恆定律，$mv + MV = 0$，則有 $ms + MS = 0$;

而物體 A 的水平位移 $s = S - L\cos\alpha$ ，帶入上式得到

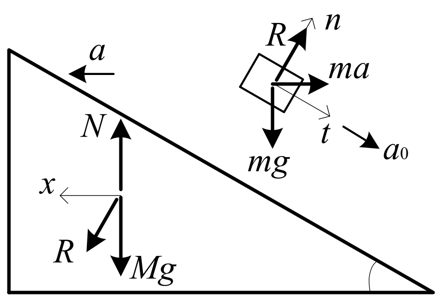
物體 A 的水平位移 $\underline{\underline{S = \dfrac{m}{m+M} L\cos\alpha}}$ 。

(b) 物體 A 和 B 的受力分析和所選坐標系如圖所示。設物體 B 對地面的加速度爲 a，物體 A 對 B 的的加速度爲 a_0。

$$\sum F_x = Ma, \quad R\sin\alpha = Ma$$

$$\sum F_n = 0, \quad R + ma\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0$$

聯立解得 $\underline{\underline{a = g\dfrac{m\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}}}$.



(c) 由 $S = \dfrac{1}{2}at^2$ 求得

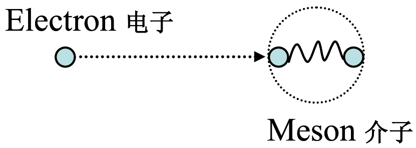
所用時間 $t=\sqrt{\dfrac{2S}{a}}=\underline{\underline{\sqrt{\dfrac{2L(M+m\sin^2\alpha)}{g(m+M)\sin\alpha}}}}$.

<u>例題八</u> (第二屆泛珠三角物理奧林匹克力學基礎試競賽題 6)

介子由兩個誇克構成，而誇克之間的相互作用相當複雜。

研究介子可通過用高能電子與之作非彈性碰撞來進行。由於碰撞過程難于分析，爲掌握其主要內涵，人們發展了一種簡化了的‘分粒子’模型。其主要內容爲：電子只和介子的某部分（比如其中一個誇克）作彈性碰撞。碰撞後的誇克再經過介子內的相互作用把能量和動量傳給整個介子。

該物理現象可用下面的簡化模型來描述：



一個質量爲 M 及動能爲 E 的電子，與介子的一個質量爲 m_1 的誇克作彈性碰撞。介子裏另一個誇克的質量爲 m_2。誇克間以一無質量的彈簧相連。碰撞前誇克處于靜止狀態，彈簧處于自然長度 L。所有運動都是一維的，和忽略一切相對論效應。試求碰撞後：

(a) 誇克 m_1 所獲得的動能；

(b) 介子作爲一個整體所具有的動能，和

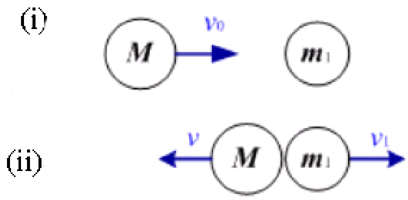
(c) 以彈簧振動形式代表的介子內能。

<u>解析與答案</u>

(a) 質量爲 M、動能爲 E 的電子以速度 $v_0=\sqrt{\dfrac{2E}{M}}$，與介子的一個質量 m_1 的誇克作彈性碰撞後的速度爲 v 和 v_1。則

$$Mv_0=Mv+m_1v_1\text{ ,}\qquad\text{(i)}$$

$$E=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}m_1v_1^{\,2}\text{ ,}\qquad\text{(ii)}$$

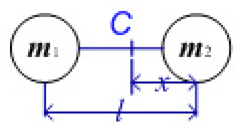


由(i) $v=v_0-\dfrac{m_1}{M}v_1$， 帶入(ii)， 得到 $v_1=\dfrac{2v_0}{1+\dfrac{m_1}{M}}=\dfrac{2M}{M+m_1}v_0$。

碰撞後誇克 m_1 獲得的動能

$$E_m=\frac{1}{2}m_1v_1^{\,2}=\frac{1}{2}m_1\left(\frac{2M}{M+m_1}v_0\right)^2=\frac{4Mm_1}{(M+m_1)^2}E\text{ 。}$$

(b) 質心 C 的位置和速度



$$m_1l=(m_1+m_2)x\text{ ，}\quad\frac{x}{l}=\frac{m_1}{m_1+m_2}=\frac{v_C}{v_1}\text{ ，}$$

$$v_C=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1=\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{2M}{M+m_1}v_0=\frac{2Mm_1}{(M+m_1)(m_1+m_2)}v_0$$

質心 C 的動能

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1+m_2){v_C}^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{2Mm_1}{(M+m_1)(m_1+m_2)}v_0\right)^2 = \frac{4M{m_1}^2}{(M+m_1)^2(m_1+m_2)}E$$

$$E_k = \frac{4M{m_1}^2}{(M+m_1)^2(m_1+m_2)}E$$ ， 就是介子作爲一個整體所具有的動能。

(c) 碰撞後誇克 m_1 獲得的動能就是介子具有的能量=
介子作爲一個整體所具有的動能 ＋ 以彈簧振動形式代表的介子內能。

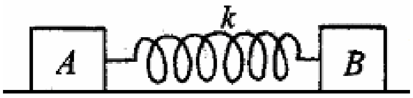
∴ 以彈簧振動形式代表的介子內能

$$E_i = E_m - E_k = \frac{4Mm_1}{(M+m_1)^2}E - \frac{4M{m_1}^2}{(M+m_1)^2(m_1+m_2)}E$$

$$E_i = \frac{4Mm_1m_2}{(M+m_1)^2(m_1+m_2)}E$$

例題九 (第二屆泛珠三角物理奧林匹克力學基礎試競賽題 7)

設一個勁度係數爲 k 的無重彈簧連著兩個質量均爲 m 的物體 A 和 B（如題 6 的介子結構)，置于光滑的水平桌面上。物體 A 以速度 v_0 向靜止的物體 B 運動，並開始壓縮彈簧。試：



(a) 描述該系統質心的運動；
(b) 求該系統的振動周期；
(c) 求彈簧的最大壓縮量；
(d) 彈簧從開始被壓縮至達到彈簧最大壓縮量的過程中，物體 A 和物體 B 相對桌面的位移各爲多少。

解析與答案

(1) 由于系統沿水平方向不受外力， 故其質心做勻速直線運動。 質心的速度 v_c 爲

$$mv_0 = 2mv_c,\quad v_c = \frac{v_0}{2}$$

(2) 取質心爲參考系， 質心靜止， 兩物體各在半根彈簧的作用下做簡諧運動，

其剛度 $k' = 2k$， $v_{max} = \frac{v_0}{2}$

它所做簡諧運動的週期爲 $\underline{\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}}}$ ， $m_1v_0 = (m_1+m_2)v_c,\ v_c = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_0$ 。

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}}$ ，剛度 $k_1 = \frac{k(m_1+m_2)}{m_2},\ k_2 = \frac{k(m_1+m_2)}{m_1}$ 。

(3) (當兩物速度相等(設爲 v)時， 彈簧不再繼續壓縮， 此時壓縮量 x 達最大， 則

由動量守恆得 $mv_0 = 2mv$； 由機械能守恆得： $\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}mv^2 \times 2 + \frac{1}{2}kx^2$；

由此可得彈簧的最大壓縮量 $x = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$)

當彈簧開始被壓縮到彈簧達到最大壓縮量的過程， 在質心參考系中， 是做簡諧運動的物體從平衡位置到彈簧達最大壓縮量的過程， 故

由機械能守恆得： $\frac{1}{2}m{v_{\max}}^2 = \frac{1}{2}k'x'^2, \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2k \cdot x'^2, x' = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$

由此可得彈簧的最大壓縮量 $x = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$

(4) 在質心參考系中做簡諧運動的物體從平衡位置到彈簧達最大壓縮量的過程， 所經時間爲振動週期的四分之一，即 $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$ ；在這段時間裏，質心的位移爲

$x_c = v_c t = v_0 \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{2k}}$

在質心參考系中， 物體 A 和物體 B 的相對位移爲 $x_c{}' = \pm x' = \pm\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$

由相對運動原理可知， 物體 A 和物體 B 相對桌面的位移各爲

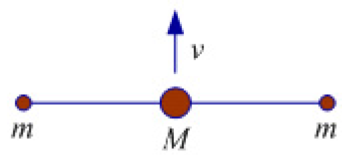
$$x_{A,B} = x_c + x_c{}' = \frac{v_0}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\sqrt{\frac{m}{2k}}\text{ 。}$$

<u>例題十</u> (2005 香港物理奧林匹克開放題 4)

長度爲 $2l$ 的輕繩，兩端各系一個質量爲 m 的小球，中央系一個質量爲 M 的大球。同一直綫上的三個球均靜止于光滑的水平桌面上。現給球 M 以一個衝量，使它獲得與繩垂直的水平速度 v。試求:

(a) 當 M 剛受到衝量時，繩中的張力。

(b) 在兩端小球發生碰撞的瞬間，繩中的張力。



<u>解析</u>

(a) M 剛受到衝量時，m 在 M 參考系中作圓周運動的開始速度爲 $-v$，而 M 在此瞬間的加速度爲零，所以不需加慣性力，因此此時繩上的張力 $T = \frac{mv^2}{l}$ 。

(b) 由于桌面是水平的，所以有三個球組成的系統動量和機械能都守恒，設兩個 m 球在碰撞的瞬間，M 和 m 相對于桌面的加速度分別爲 a_M 和 a_m，其中 a_M 與原來 v 的反向，a_m 與

原來 v 的同向，繩的張力爲 T_2，那麼 $2T_2 = Ma_M \Rightarrow a_M = \dfrac{2T_2}{M}$。

相對於 M，m 作圓周運動，在碰撞前的瞬間，m 相對於 M 的向心加速度分別爲 $\dfrac{v_x^{\,2}}{l}$，其中 v_x 是在垂直于繩方向上的速度。因爲 M 是一個非慣性系，所以在分析 m 時要加上慣性力 ma_M。即：$T_2 + ma_M = m\dfrac{v_x^{\,2}}{l}$，將 $a_M = \dfrac{2T_2}{M}$ 代入，解得：$T_2 = \dfrac{Mmv_x^2}{(M+2m)l}$。

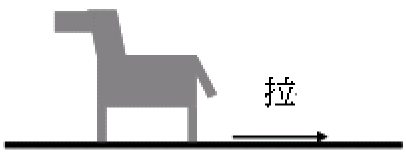
因爲繩不可伸長，所以 M 和 m 沿著繩子方向上的速度相等，均爲 v_y。有機械能守恆定律和動量守恆定律有：$2\dfrac{1}{2}m(v_x^2+v_c^2)+\dfrac{1}{2}Mv_c^2=\dfrac{1}{2}Mv^2$ 和 $Mv=(M+2m)v_c$。

解得：$v_x^2 = v^2\dfrac{M}{M+2m}$，代入 T_2 得：

$$T_1 = \frac{M^2mv^2}{(M+2m)^2 l}\text{。}$$

如果物體具有一定的尺寸，可視慣性力作用於質量中心。換句話說，如果選擇質量中心作爲原點，那麼慣性力和重力的力偶矩等於零。

<u>例題十一</u> (2005 香港物理奧林匹克開放題 5)



一玩具木馬，質量爲 100 克，重心在離前腿 0.05 m，離地 0.05 m 處，前後腿距離爲 0.15 m，放在平桌面的桌布上，前腿離桌布邊 0.3 m。布與木馬間的磨擦係數爲μ = 0.75。現突然將桌布以相對于桌面 9.0 m/s^2 的加速度拉走。求

(a) 木馬相對于桌面的加速度;
(b) 桌布對木馬前後腿的力;
(c) 當木馬到達桌布邊時相對于桌面的速度和位移。
(d) 如重心高度可變，求可保持木馬不翻轉的最大重心高度。

<u>解析</u>

(a) 設木馬相對于桌面的加速度爲 a_{ht}

$$ma_{ht} = \mu mg$$

$$a_{ht} = \mu g = 0.75\times 9.8ms^{-2} = 7.35ms^{-2}$$

(b) 考慮到作用在玩具木馬上的合力矩應爲零，得到

$$N_1 + N_2 = mg$$

$$N_1 r_1 = N_2 r_2 + mg\mu h$$

$$\Rightarrow (mg - N_2)r_1 = N_2 r_2 + mg\mu h$$

$$\Rightarrow N_2 = mg\frac{r_1 - \mu h}{r_1 + r_2}$$

$$N_2 = (0.10kg)(9.8ms^{-2})\frac{0.05m - 0.75\times 0.05m}{0.15m}$$

$$= 8.16\times 10^{-2}N$$

(c) 設木馬相對于桌布的加速度爲 a_{hc}

$$a_{hc} = a - a_{ht} = (9.0 - 7.35)ms^{-2} = 1.65ms^{-2}$$

木馬到達桌布邊時所需時間爲

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a_{hc}}} = \sqrt{\frac{2(0.3m)}{1.65ms^{-2}}} = 0.603s$$

當木馬到達桌布邊時相對于桌面的速度爲

$$v_{ht} = a_{ht}t = 4.432ms^{-1}$$

當木馬到達桌布邊時相對于桌面的位移爲

$$s' = \frac{1}{2}a_{ht}t^2 = \frac{1}{2}(7.35ms^{-1})(0.603s)^2 = 1.336m$$

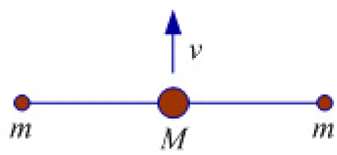
(d) 當木馬翻轉時，$N_2 = 0$，則其重心的高度須滿足

$$r_1 - \mu h \geq 0$$

$$h \leq \frac{r_1}{\mu} = \frac{0.05m}{0.75} = 6.67\times 10^{-2}m$$

<u>例題十二</u> 2006 年國際奧賽香港隊選拔試題 1

三個球用輕細繩相連，靜止在一條直綫上。中間的大球質量爲 M，其他二小球質量爲 m。現突然給中間的小球 M 一個速度 v。設繩子始終綳緊，二小球間的碰撞爲完全彈性。問大球相對于整個系統質心的運動是否爲簡諧振動。



解答：

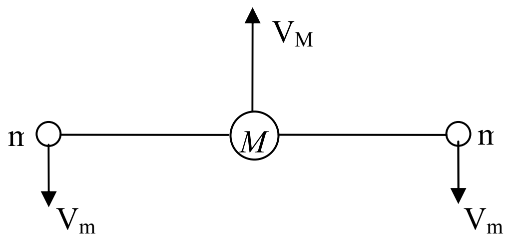
質心速度 $\frac{MV}{M+m}$

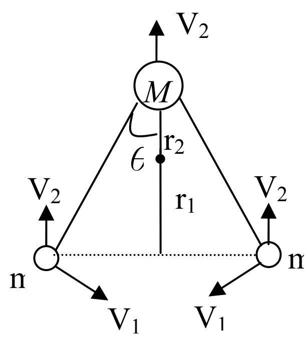
下面在質心系中计算

$$V_M = \frac{2mV}{M+2m}$$

$$V_m = \frac{-MV}{M+2m}$$

$$=> E = \frac{1}{2}MV_M{}^2 + \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot V_m{}^2 = \frac{Mm}{M+2m}V^2$$





$P=0$

下面求任意时刻小球M相对于质心的位置r

$Mr_2-2mr_1=0$

$r_1+r_2=R\cos\theta$

$=> r_2=\dfrac{2mR\cos\theta}{M+2m}$

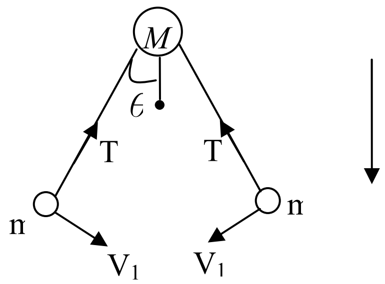
下面求任意时刻小球的速度

$(M+2m)V_2=2mV_1\sin\theta$

$\dfrac{1}{2}MV_2{}^2+\dfrac{1}{2}\cdot 2m\left[(V_2-V_1\sin\theta)^2+V_1^2\cos^2\theta\right]=E$

$=> V_1^2=\dfrac{MV^2}{M+2m\cos^2\theta}$

$V_2{}^2=\dfrac{4m^2}{(M+2m)^2}\cdot\dfrac{MV^2}{M+2m\cos^2\theta}\cdot\sin^2\theta$



下面在随M一起运动的坐标系中求小球M受到的力f

$2T\cos\theta=Ma$

$$T=\frac{mV_1^2}{R}-ma\cos\theta$$

$$=> T=\frac{mV^2}{R(1+2\cos^2\theta)}$$

$$a=\frac{2mV^2\cos\theta}{MR(1+2\cos^2\theta)}$$

回到质心坐标系，对于小球M

$$r_2=\frac{2mR\cos\theta}{M+2m}$$

$$a=\frac{2mV^2\cos\theta}{MR(1+2\cos^2\theta)}$$

此二者非线性关系，因此不是简谐振动

附錄　牛頓定律和動量守恆定律、能量守恆定律的關係

動量守恒定律、能量守恒定律可由牛頓定律推導出來。

由 $\vec{F}=m\vec{a}=m\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d(m\vec{v})}{dt}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}$ ，若 $\vec{F}$ 不變，得 $\vec{F}\Delta t=\vec{p}_2-\vec{p}_1$ ，也就是：衝量 = 動量的變化。若 $\vec{F}$ 可變，則 $\vec{F}dt=d\vec{p}$ ，即在一很短時間 dt 後動量變化 $d\vec{p}$ 等於衝量 $\vec{F}dt$ 。

考慮一包含兩個粒子的系統，粒子的初始動量分別爲 $\vec{p}_A$ 、 $\vec{p}_B$ ，系統的初始動量則爲 $\vec{p}_A+\vec{p}_B$ 。粒子 A 對粒子 B 的作用力爲 $\vec{F}$ ，由牛頓第三定律的作用力等於反作用力，得粒

子 B 對粒子 A 的作用力爲$-\vec{F}$，過了一很短時間 dt 後，粒子 A 的動量爲 $\vec{p}_A - \vec{F}dt$，粒子 B 的動量爲 $\vec{p}_B + \vec{F}dt$，系統的動量爲 $\vec{p}_A - \vec{F}dt + \vec{p}_B + \vec{F}dt = \vec{p}_A + \vec{p}_B$，也就是說系統的動量守恒。用同樣方法可證明多粒子系統的總動量也是守恒的。

同樣，若 $\vec{F}$ 不變，粒子在力作用下作直線勻加速運動，經過距離 S，則有 $2aS = v_2^2 - v_1^2$， 其中 a 是加速度，v_1 、v_2 分別爲起始、終極速度，並有

$$W = F \cdot S = maS = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \text{。}$$

即力作的功等於粒子動能的改變。

隨著物理學的發展，能量的形式越來越廣，動量守恒定律、能量守恒定律被廣泛應用到各個領域，成爲自然界的基本定律，而牛頓力學則被新的理論所代替，力這個物理量也隨著‘勢場’、‘相互作用’等的出現而在新的理論中消失。從上面的推導看牛頓力學是因，動量守恒定律、能量守恒定律可由牛頓力學推導出來，是果。但實際上，動量守恒定律、能量守恒定律才是自然界的基本定律，牛頓力學只是在特定條件下的特例。

第七章 簡諧運動

7.1 **定義**：當作用於物體的<u>淨力</u>與位移成正比及與位移的方向相反時，這個運動便是簡諧運動(SHM)。

$$F = -kx = ma$$

7.2 特性：

(a) 振盪是<u>正弦性</u>和<u>周期性的</u>;

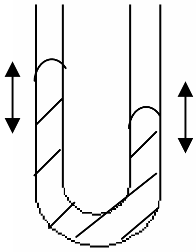
(b) 加速度永遠指向一定點 – 即是平衡點 (回復力"遵守"虎克定律)

(c) 加速度正比於其距離平衡點之間的位移；及

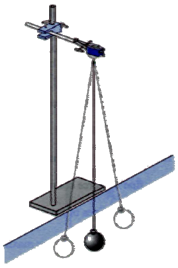
(d) 對于一已知系統，周期與振幅彼此間是獨立的。

7.3 日常生活中的振盪運動例子

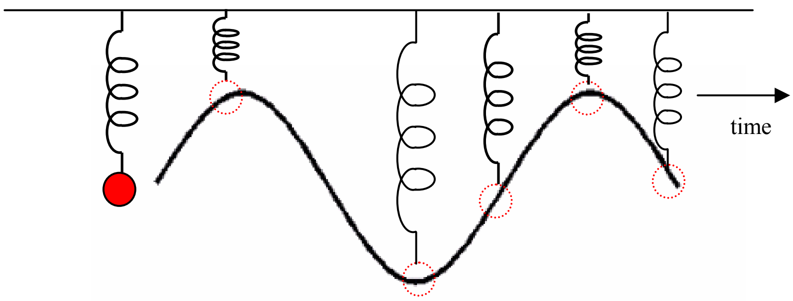
(a) 水銀在 U 形管內振蕩



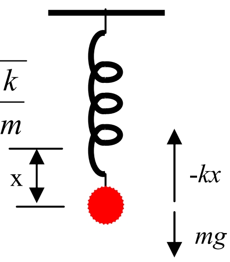
(b) 單擺



(c) 已拉緊彈簧末端振蕩中的質量



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



虎克定律:

$\boldsymbol{F_{spring} = -kx}$

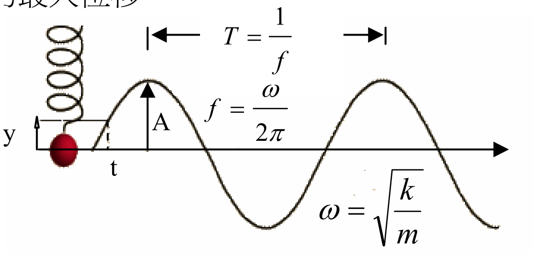
(d) 遊樂場的海盜船

7.4 有用的專門名詞：

(a) 周期 (T)：完成振蕩一周所需的時間。

(b) 頻率(f)：1 秒鐘內完成振盪的次數，并注意 $f = 1/T$。

(c) 振幅(A)：與平衡點之間的最大位移

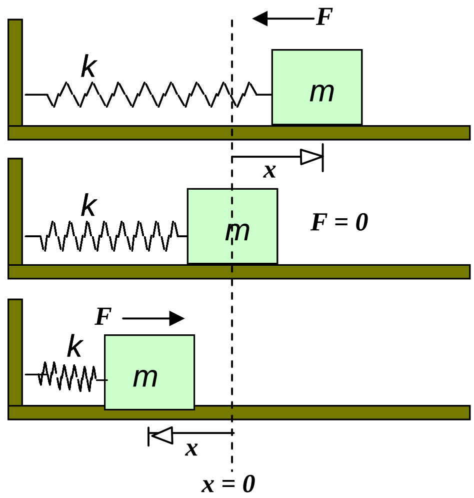


(d) 等時振盪是不論振幅如何，完成一整振盪的時間也是相同的。

注意： 不是所有沿相同路徑的重覆運動都是簡諧運動。舉例，父母和小孩玩拋球游戲時，球的運動雖是不斷的重覆，但這并非是簡諧運動。除非作用于物體的力沿運動方向符合方程式 $F = -kx$ ，那麼我們才稱這種運動爲簡諧運動。

7.5 質性地描述簡諧運動 – 彈簧上的質量：

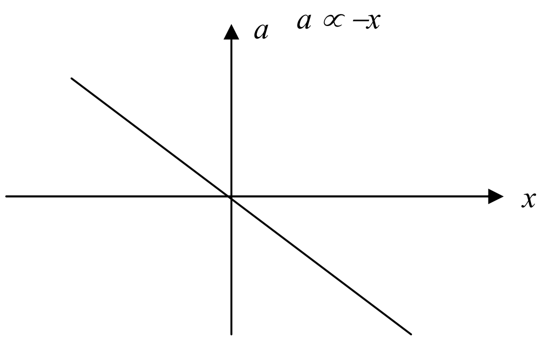
右圖所示是一典型簡諧運動例子 (質量 - 彈簧系統)。假設摩擦力並不存在。當 $x = 0$ ，即質量位於平衡點時，在此沒有淨力作用於質量上。但當質量從平衡點作距離 x 的位移，彈簧根據虎克定律產生了回復力 $F = -kx$，其中 k 爲彈簧常數。方程式上的負號表明 (當 x 爲正值時)，力是向左的。當 x 負值時，力是向右的。換句話說，力的方向永遠是指向平衡點的。



$$F = ma = -kx \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

$\because$ **a = - (常數) × x ⇒ 簡諧運動 ！**

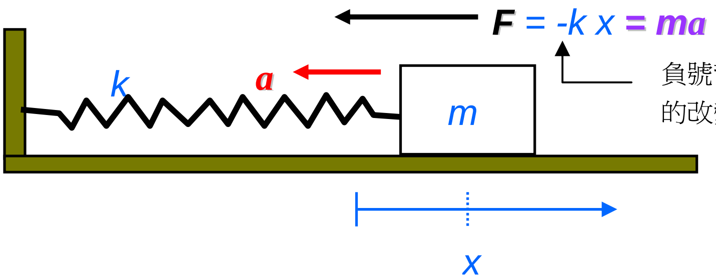
-



物體的加速度與位移圖

7.6 研究簡諧運動

力與位移成‘綫性’正比



負號背後的意義是因外力用來對抗長度的改變，幷指向平衡點。

位置： $x(t) = A\cos(\omega t)$

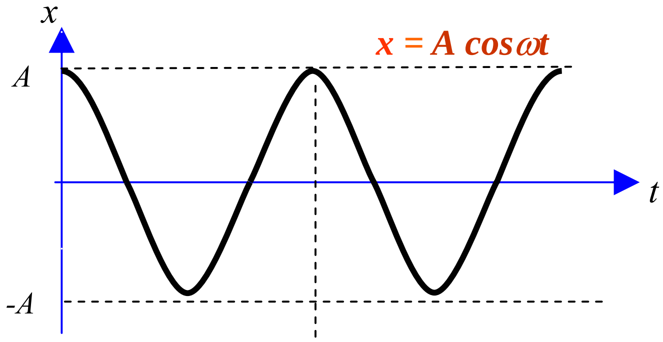
速度： $v(t) = -\omega A\sin(\omega t)$

加速度： $a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t)$

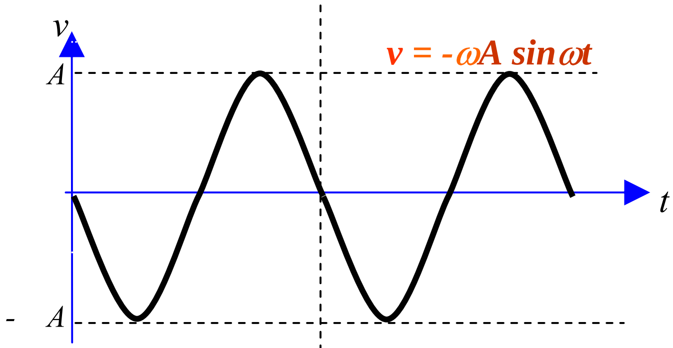
用求導數的方法，即：

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt};\ a(t) = \frac{dv}{dt}}$$

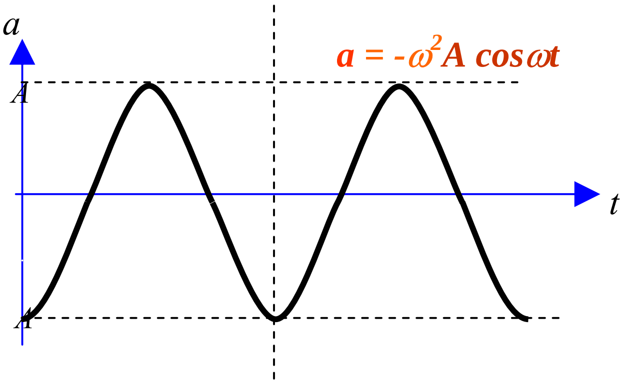
位移 - 時間圖



速度 - 時間圖



加速度 - 時間圖

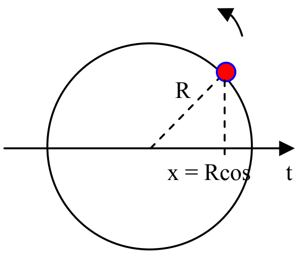


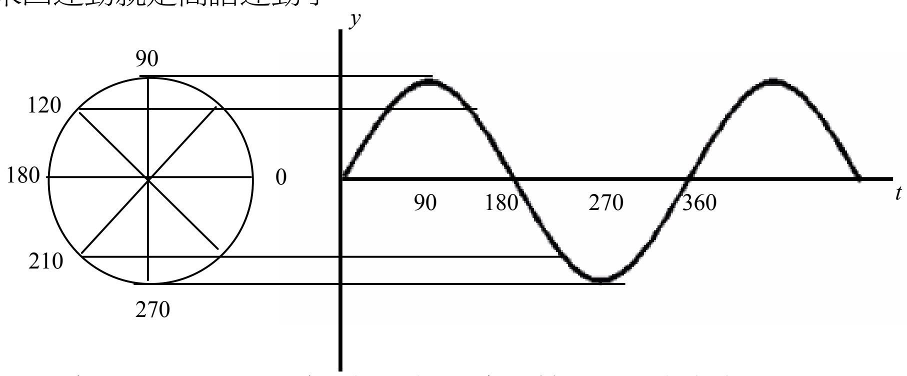
注意：
1．以上三幅圖案是正弦波的。
2.　速度 - 時間圖，及加速度 - 時間圖分別以 90^o 及 180^o 異相於位移 - 時間圖。

檢查點一：皮球扔在地上，并反彈至原本的高度，運動不斷重覆。這是否爲簡諧運動？請提出理由。

7.7 均圓周運動與簡諧運動的比較：

下列實驗演示了簡諧運動與勻速圓周運動之間的關係。粒子在勻速角速度 ω的圓盆上運動，其投影於螢幕上的陰影來回運動就是簡諧運動了。





y - t 圖爲正弦，周期爲 $T \equiv 2\pi/\omega$ ，R 爲圓的半徑，亦是簡諧運動的振幅。

數學公式下的簡諧運動

設ω爲角速度及 $t = 0$.

設一粒子作以下的運動

$$x = A\cos\omega t;\ \ v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin\omega t;\ \ a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos\omega t \quad \ldots.(1)$$

應用牛頓第二定律：

$$F = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x \qquad \ldots.(2)$$

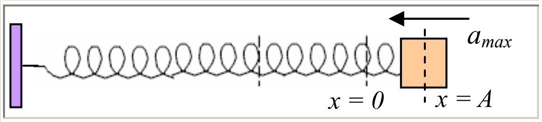
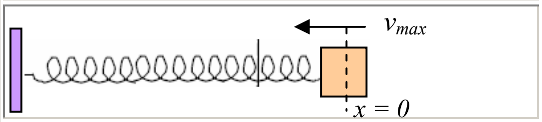
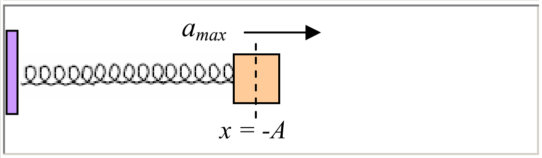
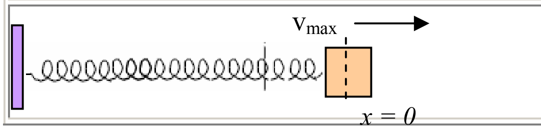
方程式 (1) 及 (2)，解得

$$-\omega^2 A\cos\omega t = -\left(\frac{k}{m}\right)A\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

即 $$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

注意： **ωt** 以弧度計算。

<u>簡諧運動中位移、速度及加速度的關係</u>

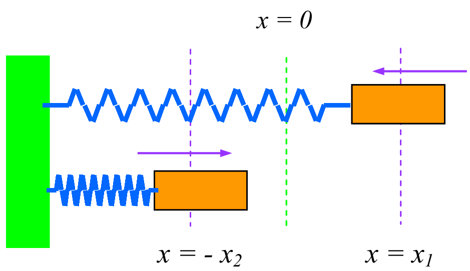
彈簧與方塊系統	位移	速度	加速度	周期
	$+A$	0	$-\ \omega^2 A$	$t = 0$
	0	$-\omega A$	0	$t = 1/4\ T$
	$-A$	0	$\omega^2 A$	$t = 1/2\ T$
	0	ωA	0	$t = 3/4\ T$

檢查點二：若垂直方置質量 - 彈簧系統，幷使其振蕩，爲何運動最終也會停止？

例題 1：

設 $A = 20\ cm;\ \omega = 2\ rad/s$. (a) 當 $x = 10\ cm$ 求 t 值。

(b) 當 $t = 0.52\ s$ ，求質量的位置 x。



解：

(a) 用方程式， $x = A\cos\omega t$

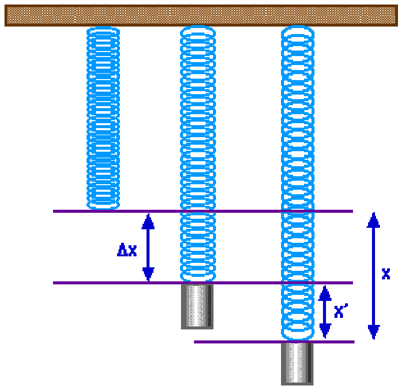
$$10 = 20\cos(2t)$$
$$0.5 = \cos(2t)$$
$$60^o = (2t)\ rad$$
$$1.046\ rad = 2t\ rad$$
$$t = 0.52\ s$$

(b) $x = A\cos\omega t \quad = 20\cos[2(0.52\ s)] = 20\cos[1.04 rad] = 20\cos(60^o) = 10\ cm$

7.8 懸掛在彈簧上的質量

右圖所示的三個圖有助我們瞭解重力下彈簧力作用于質量的情況。

圖 1 爲未負載下的彈簧長度。圖 2 爲負載下之彈簧并表明于平衡點位置，彈簧之延伸長度爲 x。圖 3 爲振蕩周期的快拍，位置與圖 2 比較時爲位移 x。



應用虎克定律于彈簧，得

$$F = kx$$

因爲在平衡點， $F =$ 質量 m 的重量，得

$$kx = mg, \quad or \quad k = mg/x$$

於圖 3，力是向上的，故得

$$F = k(x + x)$$

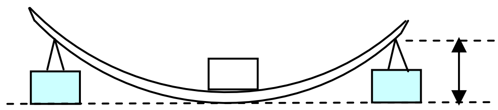
由平衡點取向下增加爲 x 的正値，當 x 增加時，淨力 F 爲：

$$\begin{aligned} F &= mg - k(x + x) \\ &= mg - kx - kx \\ &= - kx \end{aligned}$$

所以由結果我們得出運動爲簡諧運動。我們得回復力正比于位移。

$$F = ma = - kx \qquad \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x \quad or \quad a = -\omega^2 x$$

例二：已知一輕平衡木在負荷時作出靜態撓度。試演示出負荷在平衡木上的振動周期爲 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\delta}{g}}$。假設負荷與平衡木保持接觸。



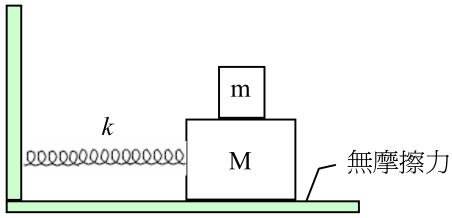
解：平衡木的運動與彈簧 - 質量系統相似，得

$$mg = k \qquad \Rightarrow k = mg/\delta$$

對於簡諧運動， $ma + kx = 0 \qquad \Rightarrow a + \dfrac{k}{m}x = 0$ ； $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

故 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\delta}{g}}$

例三：如圖所示兩方塊 (m = *1.0 kg* 及 M = *5.0 kg*) 及無重量彈簧 (k = *100 N/m*)，組合在無摩擦力的枱面上。已知兩方塊之間的靜摩擦係數爲 *0.4*。若兩方塊之間不出現滑動，求簡諧運動的最大振幅。



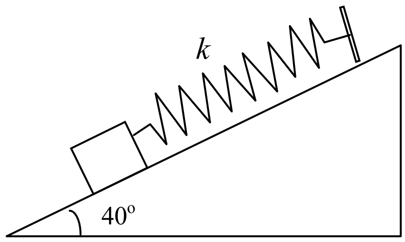
解：接近滑動的邊沿，就是作用於小方塊上的力 (在那點應爲最大的加速度) 爲 $f_{max} = \quad {}_s mg$。在那一小方塊上的加速度爲 $a_{max} = \omega^2 x_{max}$，其ω爲角頻率 ($\omega = \sqrt{k/(m+M)}$)。故此，用牛頓第二定律，我們得

$$f_{\max} = ma_{maz} = m(\omega^2 x_{\max}) = \mu_s mg$$

$$\Rightarrow \quad (\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m+M}})\cdot x_{\max} = \mu_s g,$$

故此 x_{max} = *0.24 m*

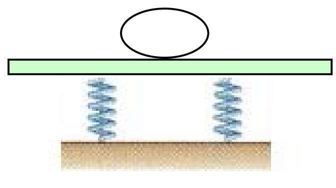
例四：如右圖所示，若方塊重 *100 N*，稍微沿斜板向下拉。放手後，求振蕩的周期？ (已知 k = *120 N/m*)



解： 就已知垂直彈簧系統，重力的效應將簡單地反影于平衡點上。這并不導致簡諧運動特性的改變 (如周期)。結果

$$\text{周期}\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{100/9.8}{120}} = 1.83\,s$$

例五： 如圖所示，木板質量 *0.5 kg*，並由兩個無質量彈簧支持。一石塊 *0.03 kg* 放置在木板上方，把彈簧壓縮多 *4 cm*。彈簧以振幅 *10 cm* 作振蕩，石塊也一直與木板保持接觸。



(a) 振盪的頻率是多少？
(b) 石塊在向上最大位移時，作用在其身上的淨力是多少？
(c) 若石塊一直與木塊接觸，求振盪的最大振幅是多少？

解：

(a) 應用 $\sum F_y = 0$ 於石塊上 。當其位置於平衡點上時，得知

$$k\Delta y - mg = 0$$

$$\text{解 } k\text{：}\quad k = \frac{mg}{\Delta y} = \frac{(0.03\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2})}{0.04\,\mathrm{m}} = 7.35\,\mathrm{N/m}$$

$$\text{得}\quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{7.35\,\mathrm{N/m}}{0.53\,\mathrm{kg}}} = 0.59\,Hz$$

(b) 當石塊在向上最大的位移時：

$$F_{\text{net}} = mg = (0.03\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2) = 0.29N$$

(c) 最大加速度以運動的角頻率和振幅表達時：

$$a_{\max} = A\omega^2 \text{, where } \omega^2 = \frac{k}{m+M}$$

得： $$a_{\max} = A\frac{k}{m+M} \qquad \ldots\ldots(1)$$

設 $a_{max} = \text{g}$，方程式(1) 成 $g = A(\frac{k}{m+M}) = A(\frac{7.35}{0.53}) = 13.87(A)$

$$\therefore A = \frac{g}{13.87} = \frac{9.8\,m/s^2}{13.87} = 0.7\ m$$

例六： 假設有一奇异彈簧，有以下較特別的回復力特質：

$$F = \begin{cases} -kx & \text{當 } x > 0 \text{ (伸長)} \\ -3kx & \text{當 } x < 0 \text{ (壓縮)} \end{cases}$$

質量爲 m 物體接在上述的彈簧，其彈簧於 $x > 0$ 和 $x < 0$ 時，表現出有不同的彈簧常數。
現由平衡點移至 $x = A$ 並放手。

(a) 計算振蕩的周期。
(b) 振蕩周期是否應變于其振幅？
(c) 振盪是否簡諧？
(d) 物體所能達到的最小 x 值是多少？
(e) 振盪是否於平衡點 $x = 0$ 上對稱？

解：

(a) 當放開物體時，物體開始趨向原點，運動是根據彈簧回復力常數爲 k 所進行。回到原點的時間應爲 $t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$ 。經過平衡點 (原點)後，彈簧回復力常數爲 $3k$，到達另一極値點的時間爲 $t_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{3k}}$ 。周期爲兩者之和乘 2，或 $T = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}(1+\frac{1}{\sqrt{3}})$ 。

(b) 由 (a) 部份答案所得，運動周期不應變於振幅。

(c) 運動並非簡諧的。

(d) 設 A' 爲最負極値。應用能量守恆定律，得

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(3k)A'^2 \quad \Rightarrow \quad A' = -\frac{A}{\sqrt{3}}$$

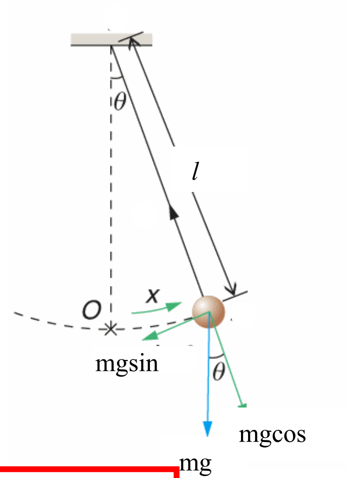
(e) 運動並非於平衡點 $x = 0$ 上對稱。

檢查點三：運用簡諧運動的原理，建議一方法於無重狀態下量度物體質量。

7.9 單擺

考慮一個單擺，由質量 m 小球連接一不能延長無重及長度爲 L 的繩所組成。繩的另一端連接一固定點，如右圖所示，小球可于一平面內自由前後擺動。

淨力的切向分量爲 $F = -mgsin$



$$F = ma \quad \Rightarrow \quad -mgsin(\omega) = ma$$

若θ非常小， 以 rad 計算，即 $sin\theta \approx \theta$

$F = -mgsin\theta \approx -mg\theta = -mgx/l$

$$ma = -mg\frac{x}{l} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x \quad \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l}$$

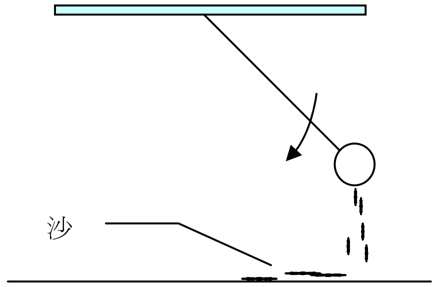
$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Sinθ ~ θ in radian for small θ

θ (degree)	θ(radian)	Sin θ	Error
2	0.03490	0.03490	0.001(%)
3	0.05236	0.05233	0.057(%)
4	0.06981	0.06975	0.086(%)
5	0.08727	0.08716	0.126(%)
10	0.1745	0.1736	0.515(%)
15	0.2618	0.2588	1.14(%)

注意：單擺周期自變於其質量及振幅，但應變於 (1) 其長度及(2) 重力加速度。換句話說，注意上述推導的近似 $sin\theta \approx \theta$。若擺動角度並非小時，即從點 O 開始作出的初位移相對繩長 L 來說，幷非細小時，運動的周期就幷非簡諧了，因爲回復力不再正比于θ，而是正比於 $sin\theta$。

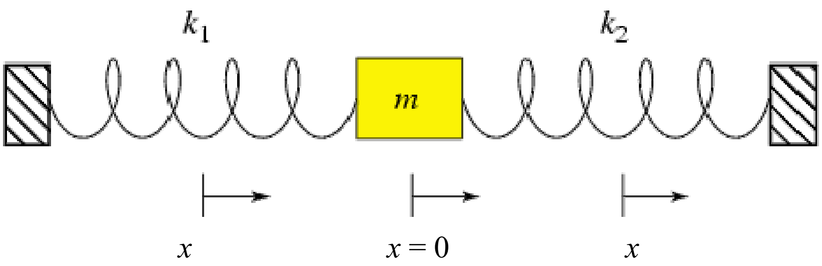
檢查點四：如圖所示，單擺球不斷漏沙粒到紙上。失去沙粒對單擺周期是否有影響？試解釋。



檢查點五： 單擺長度 L 懸挂于升降機的天花上。升降機靜止時，單擺周期爲 T。下列單擺周期將如何改變 (a) 升降機以勻速度向上移動 (b) 升降機以勻加速度向下移動。

7.10 質量于多彈簧的周期

(1) 如下圖所示，質量 M 被緊接牆壁的兩條拉緊彈簧拉著。當質量被稍微移離平衡點時，其運動爲簡諧運動。試計算其振動周期。



解：

以兩彈簧作用在 M 的力爲

$F_1 = -k_1x$ 因彈簧常數爲 k_1 而來；$F_2 = -k_2x$ 因彈簧常數爲 k_2 而來，

故淨力爲， $F = F_1 + F_2 = -(k_1 + k_2)x$

$\therefore \quad F = Ma = -(k_1 + k_2)x$

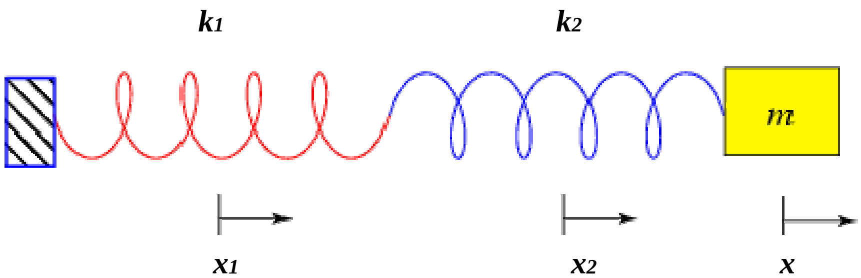
得 $a = -\dfrac{k_1 + k_2}{M}x$

$\therefore$ 運動爲簡諧運動

運動周期爲 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k_1 + k_2}}$

(2) 串連二條彈簧於一質量

如圖所示，兩條彈簧其常數分別爲 k_1 及 k_2 串連一起並拉著一質量 M 作簡諧運動。試求其運動周期。



解：

設 M 向右位移 x，每條彈簧分別的延長爲 x_1 及 x_2，即彈簧的總延長度爲 $x = x_1 + x_2$。

設 F 爲彈簧上的拉力，并且貫穿整個彈簧系統，拉力對于 2 個彈簧的大小值是完全相等的。

故 $F = -k_1x = -k_2x$

$$x_1 = \frac{F}{k_1};\ x_2 = \frac{F}{k_2}$$

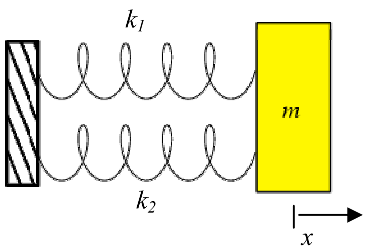
即 $F = -(K_{eff})x$；其 K_{eff} 爲系統的有效彈簧常數。

得 $K = \dfrac{F}{x} = \dfrac{F}{x_1 + x_2} = \dfrac{F}{\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}} = \dfrac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$；　　注意：$\dfrac{1}{k_{eff}} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \ldots$

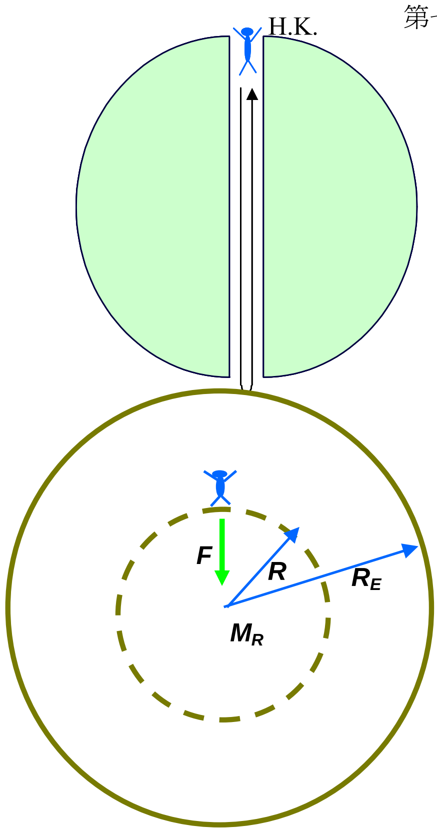
$$\therefore a = -\left(\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}\frac{1}{M}\right)x \Rightarrow \text{運動爲簡諧運動。}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1 + k_2)M}} \quad or \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{(k_1 + k_2)M}{k_1k_2}}$$

檢查點六：試證右圖所示之物體的運動爲簡諧運動。



例七：相像中的運輸管道



由香港挖穿一條垂直的運輸管道，經過地球中心，直達地球的另一端。一個物理科學生在正午跳入洞中。(a) 展示學生在管道中的運動爲簡諧運動。(b) 計算其回到香港的時間。設地球爲一勻球體及空氣阻力可被忽略。已知 $g = 9.8m/s^2$, $R_E = 6.38\times 10^6$ m.

解：

(a) 由地球中心量度距離 R，其地心引力施予學生的量值爲

$$F_R = G\frac{mM_R}{R^2},\ \text{其 } M_R \text{ 爲半徑 } R \text{ 內的質量}$$

$$\frac{F_R}{F_{R_E}} = \frac{GmM_R/R^2}{GmM_E/R_E^2} = \frac{M_R}{R^2}\cdot\frac{R_E^2}{M_E}\ ....(1)$$

$$\because M \,\alpha\, R^3\ [M = \rho V = \rho(\frac{4}{3}\pi R^3)]$$

即方程式 (1) 變成

$$\frac{F_R}{F_{R_E}} = \frac{R^3}{R^2}\cdot\frac{R_E^2}{R_E^3} = \frac{R}{R_E}\ ....\ ....\ ....(2)$$

由於 $F_{R_E} = -\,mg$ ……………….(3)

將方程式 (3) 放入方程式 (2)，得

$$F_R = F_{R_E}\cdot\frac{R}{R_E} = -mg\cdot\frac{R}{R_E} = -(k)R \quad \Rightarrow \quad k = mg/R_E$$

就如質量在彈簧上，F 正比于位移但方向爲相反，即：$F \propto -R$。所以學生于地球內的管道中的進出運動爲簡諧運動。

(b) 根據牛頓第二定律

$$\mathrm{F} = m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{R_E}\cdot R \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{dt^2} = -(\frac{g}{R_E})\cdot R$$

比較彈簧 - 質量系統的方程式，$d^2x/dt^2 = -\omega^2 x = -(g/R_E)x$

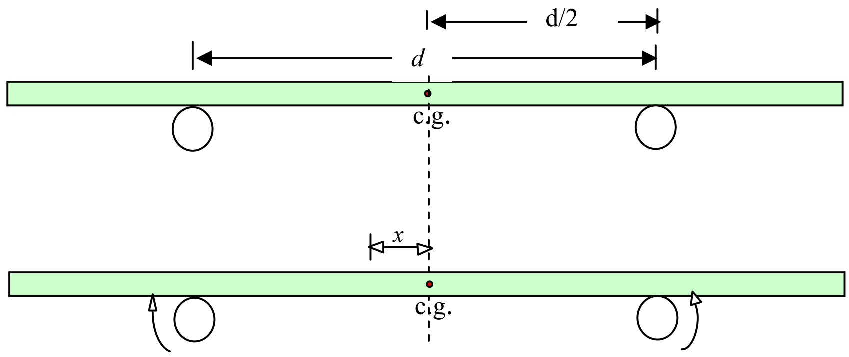
$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{R_E}}$$

放入 $g = 9.8m/s^2$, $R_E = 6.38\times10^6\ m$, $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 5067\,s = 84.4\,\text{min}$

所以學生轉回香港需時 *84.4* 分鐘，時間爲 *1:24 p.m.*

注意：這與接近地面人造衛星的周期相同，及自變于管道的長度。

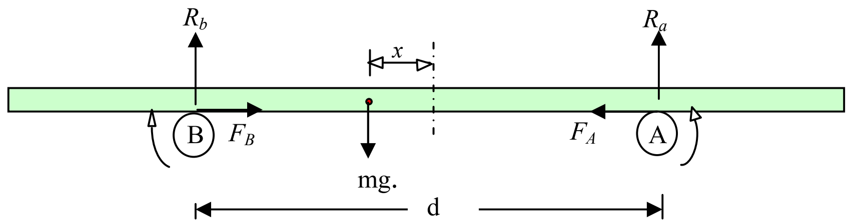
例八：如圖所示，兩圓片距離 d 幷于相反方向轉動。一輕長棒質量 m 的質心先放在兩圓片中間，再向旁移離 x。因有著不平衡的摩擦力於兩圓片上，長棒在圓片上前後振盪。已知長棒與圓片之間的動摩擦係數爲 $_k$。



(a) 推斷長棒於圓片上的反作用力，並以 d, x, m 及 g 表示，其中 g 爲引力加速度。
(b) 展示長棒的運動爲簡諧運動。
(c) 計算長棒運動的周期。

解：

(a) 考慮長棒的質心向左移動小距離 x。以 R_a, R_b 分別爲圓片 A 及圓片 B 作用於長棒上的作用力。



計算點 B 上的力矩

$$R_a d = mg(\frac{d}{2} - x) \quad \Rightarrow \quad R_a = mg(\frac{1}{2} - \frac{x}{d})$$

由于作用于長棒垂直方向上的淨力爲零，所以

$$R_b = mg - R_a = mg - mg(\frac{1}{2} - \frac{x}{d}) = mg(\frac{1}{2} + \frac{x}{d})$$

(b) 應用牛頓第二定律，得

$F_A - F_B = ma$　　其 F_A 及 F_B 爲圓片 A 及圓片 B 上的摩擦力。

$_k(R_a - R_b) = ma$

由部份 (a) 結果，得

$$\mu_k\left[mg(\frac{1}{2} - \frac{x}{d}) - mg(\frac{1}{2} + \frac{x}{d})\right] = ma$$

$$\mu_k(-\frac{2mg}{d})x = ma$$

$$\therefore a = -(\frac{2\mu_k g}{d})x$$

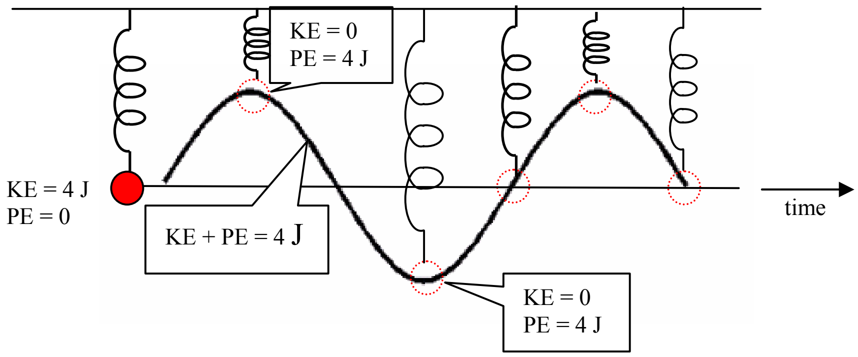
由於長棒的加速度 a 正比於位移 x，但方向相反。故長棒的運動爲簡諧運動。

(c) $\omega^2 = \dfrac{2\mu_k g}{d} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{d}{2\mu_k g}}$

檢查點七： 一質量 m 及長度爲 L 的正方木塊與水平面平行地浮于水面。若木塊與平衡點作距離 y 的位移。展示木塊在水中的運動爲簡諧運動并找出其振蕩周期。假設水的密度爲 。

簡諧運動與能量的考慮：

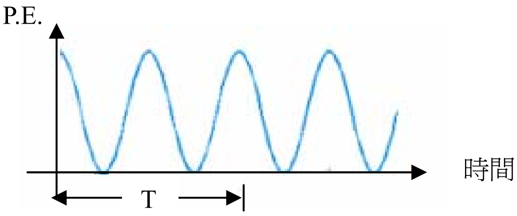
簡諧運動中，KE 及 PE 互相間恆常地轉換。而總能量維持不變。

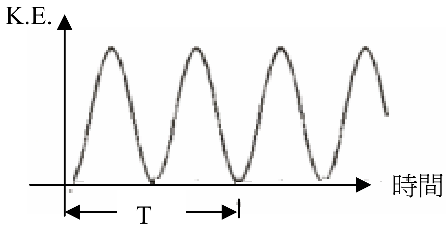


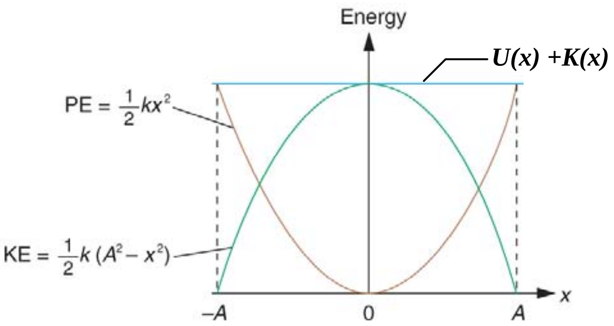
若 $x = A\cos\omega t$，且 KE 爲

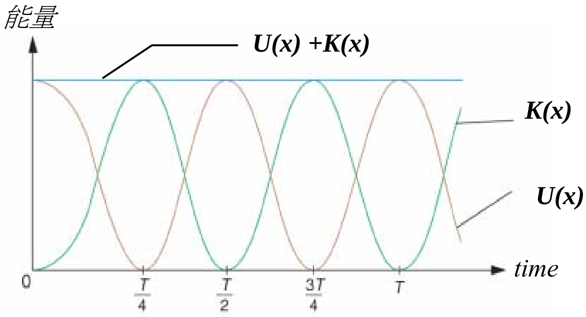
1. 總能量：$E = 1/2\ kA^2$ 爲常數。這不隨時間改變。
2. 勢能：$U = 1/2kx^2 = 1/2kA^2\cos^2\omega t$ 其中 $x = A\cos\omega t$.
3. 動能： $K = 1/2mv^2 = 1/2m\ (\omega A\sin\omega t)^2 = 1/2m\omega^2A^2\sin^2\omega t = 1/2kA^2\sin^2\omega t$.

能量隨時間改變如下圖所示：









檢查點八： 質量 - 彈簧系統以振幅 A 作簡諧運動。若質量增加一倍但振幅不變，能量是否有改變？試解釋。

例九：考慮一個簡諧振蕩，$m = 0.5\ kg$, $k = 10\ N/m$ 及振幅爲 $A = 3\ cm$。(a) 振盪的總能量是多少？(b) 最大的速度是多少？ (c) 當 $x = 2\ cm$ 時，速度是多少？

解：

(a) $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(10)(0.03)^2 = 0.0045J$

(b) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0.5}} = 4.47 rad/s \quad \Rightarrow v_{\max} = \omega A_{\max} = (4.47\, rads^{-1})(0.03\, m) = 0.134\, m/s$

(c) $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = (4.47\, rads^{-1})\sqrt{(0.03)^2 - (0.02)^2} = 0.1\, m/s$

例十： 假設一粒子緊接著一理想彈簧。粒子位移 x_1 時速度爲 v_1 ，位移爲 x_2 時速度爲 v_2。求運動的 (a) 角頻率； (b) 振幅，幷以已知的物理量表示。

解：

(a) $\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}m_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$ 其 m 及 k 分別爲粒子的質量及彈簧常數。

$k(x_1^2 - x_2^2) = m(v_2^2 - v_1^2)$

$\because \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}}$

(b) $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$　　其 A 爲振盪的最大振幅。

$$A^2 = \frac{m}{k}(v_1^2) + x_1^2 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \cdot v_1^2 + x_1^2 = \frac{x_1^2 v_2^2 - x_2^2 v_1^2}{v_2^2 - v_1^2}$$

$$\therefore A = \left(\frac{x_1^2 v_2^2 - x_2^2 v_1^2}{v_2^2 - v_1^2} \right)^{1/2}$$

7.11 共振、受迫振盪及阻尼振盪

振盪運動是非常普遍。振盪可分成三種，稱爲：自由振盪、阻尼振盪及受迫振盪(或稱驅動振盪)。

(a) 自由振盪

定義：總能量守恆，並且振幅恆常不變。例子爲簡諧運動。

(b) 阻尼振盪：

在實際的情況下，所有機械振盪並非是自由振盪。這是由于系統中必然存著耗散部分，幷不斷地把能量帶走。此振盪被視爲阻尼振盪。

阻尼可以是空氣阻力、液體阻力或是固態阻力。假設阻尼力正比於速度，即 $F_d = -bv$

考慮力的總和：　$F = -kx - bv$ 及　$F = ma$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \Rightarrow x(t) = A_o e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \delta) \quad \text{其} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

1. 稍微阻尼振盪

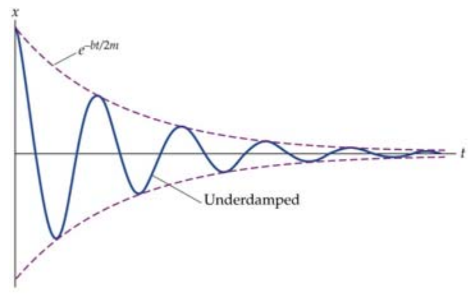
a. 系統<u>在靜止前將作數次的振盪</u>。振幅隨時間作指數式衰變，即連續的振幅比率爲常數。

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2} = \frac{A_4}{A_3} = .. = K$$

$$\Rightarrow \ln\frac{A_3}{A_1} = \ln(\frac{A_3}{A_2} \times \frac{A_2}{A_1}) = \ln(\frac{A_3}{A_2}) + \ln(\frac{A_2}{A_1}) = 2k$$

同樣地 $\ln(\frac{A_7}{A_1}) = 7k \quad \therefore \ln(\frac{A_t}{A_1}) = kt$

得　$A_t = A_1 e^{-kt}$

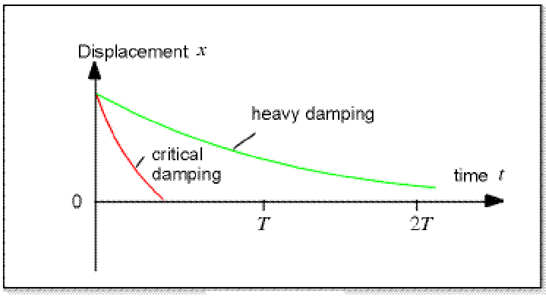


b. 阻尼力很小。振幅漸次減少，不再恆常不變。

c. 振蕩周期仍保持不變。

2. 臨界阻尼

系統<u>以最短間達到靜止</u>。設計優良的電流計就是臨界阻尼的一種，其指針移至新位置停下來而沒有超前。



3. 超阻尼 / 重阻尼

a. 阻尼力比臨界阻尼力更大。

b. 系統不會振蕩，但需要很長時間才可移到平衡力的位置。

(c) 阻尼振盪的例子：

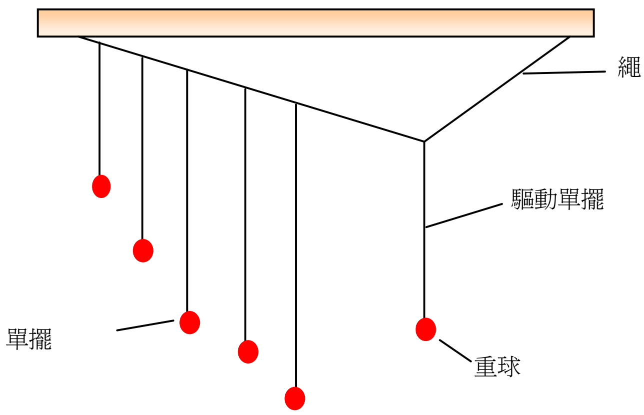
1. 由于內部或外部的阻力，很多振蕩系統都是阻尼振蕩的。
   (a). 在彈簧中的內力，拉緊的彈簧在振盪時失去能量。
   (b). 空氣阻力使擺動中的單擺漸次減慢。
   (c). 振動中的音叉或樂器 – 空氣阻力使振盪完結。
   這些都是輕微的阻尼振盪。
2. 揚聲器的紙筒能做成阻尼振盪。

1. 在磁場中擺動的金屬片。
2. 電動圈式的電流計，其設計爲臨界阻尼，主要是因爲渦電流的產生，使其指針很快便到達最後的靜止位置。
3. 汽車的吸振裝置設計爲臨界阻尼，減少了過渡的振蕩。

驅動振盪

當一周期性的驅動力作用于振蕩系統時，使其不斷的振蕩，系統此時被稱爲受迫振蕩。以下有兩個例子：

例一：巴爾通擺

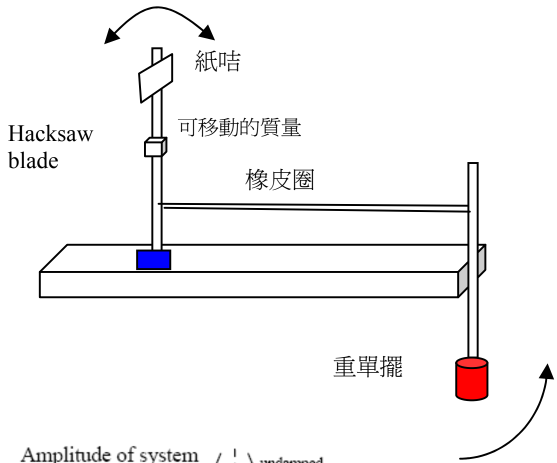


以下是驅動振盪的觀察

a. 能量不斷由驅動者輸入被驅動者內。振幅不斷增加。
b. 在穩定的情況下，特定的驅動頻率有固定的振幅。
c. 這引伸是驅動力作用于系統的功率和系統的能量耗散率是相同的。
d. 振幅: 若驅動頻率與自然頻率相當接近，此時能量的輸送最爲有效，更大的振幅會相應地增加。

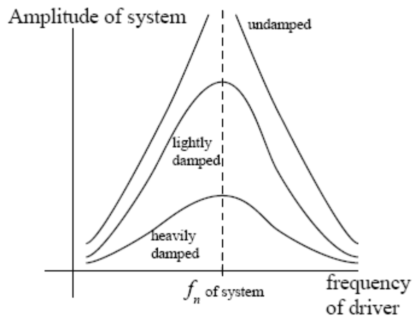
例二：鐵鋸刀

如右圖所示，鐵鋸刀爲由一重單擺所驅動。在穩定的情況下，系統的振蕩頻率與外力一樣。振幅也是維持不變的。即系統所得的能量速率與其能量耗散的速率一樣。



共振：

當驅動頻率與自然頻率相同時，共振發生。特徵是系統有非常大的振盪，並吸收大量的能量。



7.12 檢查點的題解

1. 物體進行簡諧運動是因爲作用在其上的力爲 $F = -kx$。在位移改變下，力也在改變。當皮球跌下地面時，皮球不斷重覆地反彈至原來高度。當球在半空時，不論向上或向下運動時，作用在其身上的力只有其重量，是固定的力量。故此，運動並非簡諧運動。

2. 運動最終停止是因爲能量用作克服空氣的阻力。

3. 要知道一個人的重量或質量，只需要簡單地站在天秤上就可以，因爲在地球上重力是相對地穩定。但在太空軌道上量度太空人的重量或質量就相對地困難得多。在軌道上太空人被視爲無重，這差不多是真的。在軌道上重力接近零，此時不能靠重力站在天秤上就得知其體重。雖沒有可量度的體重，但質量仍然存在。故爲了尋找太空人的質量，在沒有重力情況下，我們可使用「身體質量量度器」。「身體質量量度器」如下圖示，能讓太空人座在椅子上面，椅子作前後振蕩。只要知道振蕩周期，我們就能在沒有重力下決定一個人的質量。質量可由質量 - 彈簧系統的振蕩周期方程　　　　　　　　　　　　　　　　式計算出來。

太空人 Tamara Jernigan 在穿梭機中量其慣性質量。
(*NASA*)

4. 單擺的周期自變于其質量。所以周期不被影響。

5. (a) 在均速升降機中的單擺與靜止單擺無异。所以，周期仍是 T。

(b) 當升降機以恒加速向下時，單擺所感到有效重力加速比 g 爲小，故周期增加。

4. 由緊接在牆兩條彈簧提供的力爲

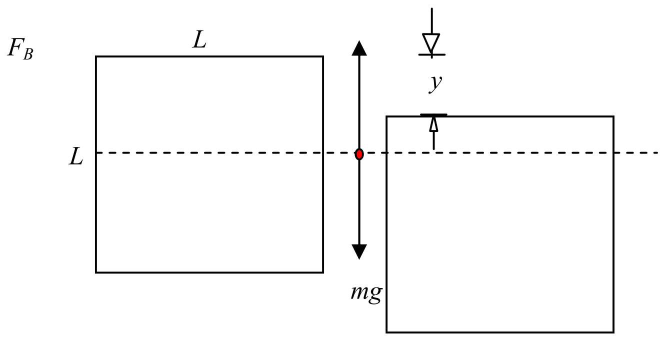
$F = -(k_1x + k_2x) = -(k_{eff})x.$　有效彈簧常數是 $k_{eff} = k_1 + k_2$

應用牛頓第二定律，得

$$F = ma = -(k_{eff})x = -(k_1 + k_2)x$$

由于系統加速度正比於其位移，但方向相反，故此方塊爲簡諧運動。

5. 下圖演示方塊浮于水面的平衡點及被向下推小距離 y 時的情況。我們可根據其角頻率尋找其振蕩周期。應用牛頓第二定律，得運動方程式，再由方程式決定其運動的頻率。



應用 $\sum T_y = ma_y$ 於方塊。當方塊被稍微向下推，距離爲 y: $mg - F_B = ma_y$，其 F_B 其作用于方

塊的向上浮力。

對 $y << l$, $\Delta F_B \approx dF_B = -\rho Vg = -\rho(L^2 y)g = m\dfrac{d^2 y}{dt^2}$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{L^2 \rho g}{m} y = -\omega^2 y \qquad \text{其} \quad \omega^2 = \frac{L^2 \rho g}{m}$$

故振蕩的周期爲 $T = \dfrac{2\pi}{L\sqrt{\dfrac{\rho g}{m}}} = \dfrac{2\pi}{L} \cdot \sqrt{\dfrac{m}{\rho g}}$

8. 系統的總能量增加有 2 個因素。質量加倍故動能加倍；由於總能量等於最大動能 ，故此總能量亦相應加倍。